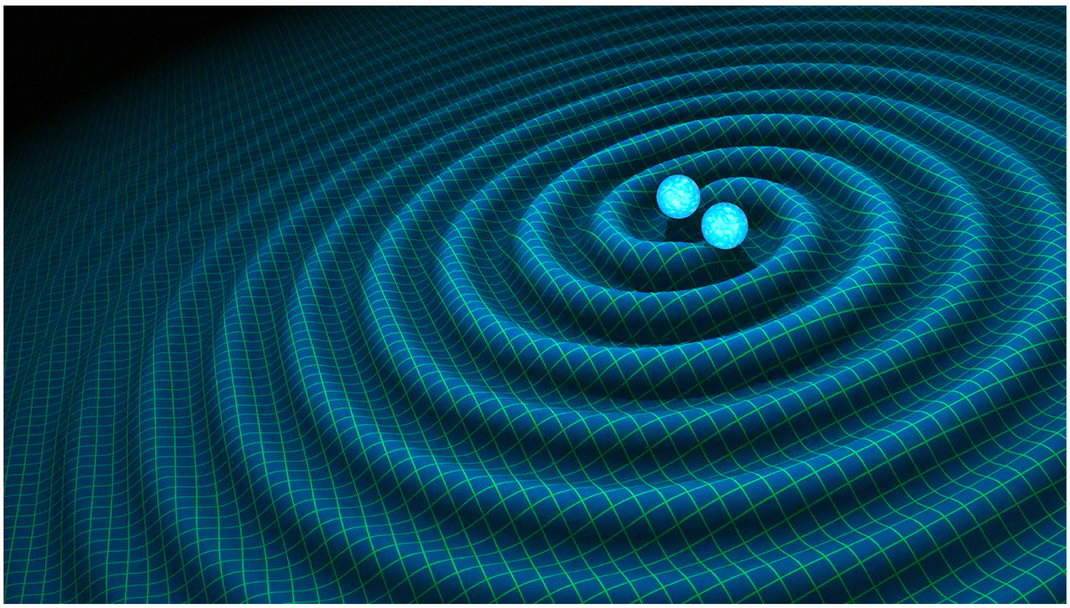
重力波



Chocomint

March 2023

目錄

1 愛因斯坦場方程

1.1 真空場方程

要推導真空中場方程，我們首先需要「愛因斯坦-希爾伯特作用量(Einstein-Hilbert action)」，其定義如下：

$$\boxed{S_G = \frac{1}{2\kappa}\int R\sqrt{-g}\,d^4x} \tag{1.1}$$

爲使作用量爲最小值，我們可以使用變分法：

$$\delta S_G = 0 \tag{1.2}$$

由於 $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$，δS_G 可以寫成：

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa}\int \left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\,\delta\left[g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right]\right)d^4x \tag{1.3}$$

首先討論第一項。考慮一個坐標系，使得里奇曲率張量消到只剩兩項：

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda,\nu} \tag{1.4}$$

因此：

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu,\lambda} - \delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda,\nu} = (\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu})_{,\lambda} - (\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda})_{,\nu} \tag{1.5}$$

將兩邊乘上度規張量，並交換一些上下標：

$$g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu{}_{\mu\nu})_{,\lambda} \tag{1.6}$$

定義右式爲一個向量 $\vec{A}$：

$$A^\lambda \equiv g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu{}_{\mu\nu} \tag{1.7}$$

因此，(1.6)式可以變成：

$$g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} = A^\mu{}_{,\mu} \tag{1.8}$$

注意到右式就是$\vec{A}$的散度，如果我們對全空間做體積分，(1.3)式的第一項會變爲面積分；又度規張量及其變化量在無窮遠處會趨向於0，因此面積分也爲零：

$$\int_{\mathbb{R}^4}(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta R_{\mu\nu})\,d^4x = 0 \tag{1.9}$$

而對於第二項，先計算$\delta\sqrt{-g}$。由連鎖率：

$$\delta\sqrt{-g} = \left(\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\alpha\beta}}\right)\delta g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}}\right)\delta g_{\alpha\beta} \tag{1.10}$$

注意到

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} = g g^{\alpha\beta} \tag{1.11}$$

因此：

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\, \delta g_{\alpha\beta} \tag{1.12}$$

再來計算 $\delta g^{\mu\nu}$ 。考慮度規張量及其反矩陣乘積之微小變化：

$$\delta(g^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta}) = 0 \tag{1.13}$$

可得：

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\alpha\beta} \tag{1.14}$$

綜合(1.12)式與(1.14)式，我們可以得到：

$$\begin{aligned}\delta\left[g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right] &= \sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}\right) \\ &= \sqrt{-g}\left(\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\right)\end{aligned} \tag{1.15}$$

將上式代入(1.3)式，可以得到：

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa}\int \sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\, d^4x \tag{1.16}$$

又 $\delta S_G = 0$，因此我們可以得到「真空場方程」：

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 0} \tag{1.17}$$

或者我們定義「愛因斯坦張量」：

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}} \tag{1.18}$$

因此：

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 0} \tag{1.19}$$

1.2 物質與能量

若空間中含有能量/質量，這時候我們需要考慮另一個物質能量的作用量：

$$\boxed{S_M = \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g}\, d^4x} \tag{1.20}$$

其中，$\mathcal{L}_M$ 爲物質與能量的拉格朗日量密度。如此，我們的變分式變爲：

$$\delta(S_G + S_M) = 0 \tag{1.21}$$

考慮 $\mathcal{L}_M\sqrt{-g}$ 的微小變化，並且 $\mathcal{L}_M$ 只跟度規張量與其微分有關：

$$\delta\big[\mathcal{L}_M\sqrt{-g}\big] = \frac{\partial\big[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\big]}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\big[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\big]}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}}\,\delta g^{\mu\nu}{}_{,\lambda} \tag{1.22}$$

定義一個向量 $\vec{B}$：

$$B^\lambda = \frac{\partial\big[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\big]}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}}\,\delta g^{\mu\nu} \tag{1.23}$$

其散度爲：

$$B^\lambda{}_{,\lambda} = \left\{\frac{\partial\big[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\big]}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}}\right\}_{,\lambda}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\big[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\big]}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}}\,\delta g^{\mu\nu}{}_{,\lambda} \tag{1.24}$$

因此(1.22)式可以改寫爲：

$$\delta\big[\mathcal{L}_M\sqrt{-g}\big] = \frac{\partial\big[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\big]}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu} - \left\{\frac{\partial\big[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\big]}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}}\right\}_{,\lambda}\delta g^{\mu\nu} + B^\lambda{}_{,\lambda} \tag{1.25}$$

最後一向同樣會在對窮空間積分後變爲 0，因此：

$$\delta S_M = \int \left(\frac{\partial\big[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\big]}{\partial g^{\mu\nu}} - \left\{\frac{\partial\big[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\big]}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}}\right\}_{,\lambda}\right)\delta g^{\mu\nu}\, d^4x \tag{1.26}$$

對於一個系統，若其拉格朗日量密度爲 $\mathcal{L}_M$，一個對稱的「能量-動量張量(Energy-Momentum Tensor)」被定義爲：

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\big[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\big]}{\partial g^{\mu\nu}} - \left\{\frac{\partial\big[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\big]}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}}\right\}_{,\lambda}\right) \tag{1.27}$$

因此：

$$\delta S_M = -\frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}\, d^4x \tag{1.28}$$

將上式代回(1.21)式中即可得到：

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}} \tag{1.29}$$

這個就是著名的「愛因斯坦場方程(Einstein Field Equation)」。

若我們將(1.29)式乘上 $g^{\mu\nu}$ ，我們可以得到：

$$R^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}_{\mu} = \kappa T^{\mu}_{\mu} \tag{1.30}$$

注意到， $R^{\mu}_{\mu} = R, T^{\mu}_{\mu} = T$ 以及 $\delta^{\mu}_{\mu} = 4$ ，因此：

$$R = -\kappa T \tag{1.31}$$

代回(1.29)式可得：

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right)} \tag{1.32}$$

因此在真空中$(T_{\mu\nu})$，愛因斯坦場方程也可以寫作：

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0} \tag{1.33}$$

1.3 牛頓極限

爲了求得 κ，我們需要讓愛因斯坦方程在微弱非時變重力場中且速度很慢時，可以直接對應到牛頓的萬有引力定律。

因爲能動張量的分量 T_{00} 的物理意義爲「能量密度」，在 $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ 的 Minkowski 時空中 T_{00} 可以被寫作：

$$T_{00} = -c^2\rho \tag{1.34}$$

在速度很慢時($v \ll c$)，因爲能動張量的其他分量都會跟動量有關，因此皆趨近於 0。由此，能動張量的純量形式即爲：

$$T = T^{\mu}{}_{\mu} = \eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = c^2\rho \tag{1.35}$$

考慮在微弱重力場中，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$。利用(1.32)式，其 00 分量爲：

$$R_{00} = \kappa\left[(-c^2\rho) - \frac{1}{2}(c^2\rho)(-1)\right] = \frac{1}{2}\kappa c^2\rho \tag{1.36}$$

由測地線方程：

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \tag{1.37}$$

因爲速度很慢，四維向量 $\dot{x}$ 可以近似成 $(c,0,0,0)$，而固有時距也可以直接等於時間。因此：

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\Gamma^{\alpha}{}_{00}\,c^2 \tag{1.38}$$

若 $\alpha = 0$，顯然右式爲 0，因此 $\Gamma^{0}{}_{00} = 0$。定義標記 i 代表空間座標標記 $1,2,3$，若 $\alpha = i$，由上式可推得：

$$\Gamma^{i}{}_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{d^2x^i}{dt^2} \tag{1.39}$$

根據牛頓的萬有引力定律，重力場 ϕ 的梯度就會是加速度，因此：

$$\Gamma^{i}{}_{00} = \frac{1}{c^2}(\nabla\phi)^i = \frac{1}{c^2}\,\partial^i\phi \tag{1.40}$$

由上式也可以看出 $\Gamma^{i}{}_{00}$ 有除上 c^2，這會使其值特別的小。

我們知道黎曼曲率張量可由 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ 定義之：

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^{\gamma}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\gamma} - \Gamma^{\delta}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\delta} \tag{1.41}$$

因此

$$R_{00} = R^{\mu}{}_{0\mu0} = \Gamma^{\mu}{}_{00,\mu} - \Gamma^{\mu}{}_{0\mu,0} + \Gamma^{\rho}{}_{00}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{0\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\rho0} \tag{1.42}$$

由於後兩項爲 $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ 相乘，可視爲二階小項，將其忽略；而在非時變得重力場下，第二項對 x^0 微分即是對時間微分，其值爲 0。因此：

$$R_{00} = \Gamma^{\mu}{}_{00,\mu} = \Gamma^{0}{}_{00,0} + \Gamma^{i}{}_{00,i} = \frac{1}{c^2}\,\partial_i\partial^i\phi \tag{1.43}$$

注意到 $\partial_i \partial^i = \nabla^2$ ，又由重力場的 Poisson 方程：

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho \tag{1.44}$$

可得：

$$R_{00} = -\frac{4\pi G\rho}{c^2} \tag{1.45}$$

將其代回(1.36)式中即可以得到：

$$\boxed{\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}} \tag{1.46}$$

這個常數又叫做「愛因斯坦重力常數(Einstein Gravitational Constant)」，近似值爲：

$$\kappa \approx 2.076647442844 \times 10^{-43}\,\mathrm{N}^{-1} \tag{1.47}$$

2 線性場近似

2.1 平坦時空下的微擾

假設現有時空爲原有 Minkowski 時空加上微擾：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{2.1}$$

假設存在 $k^{\mu\nu}$ 滿足

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + k^{\mu\nu}, \quad |k^{\mu\nu}| \ll 1 \tag{2.2}$$

其中 $g^{\mu\nu}$ 與 $\eta^{\mu\nu}$ 爲反矩陣。將(2.1)式與(2.2)式相乘：

$$\begin{aligned} g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} &= (\eta_{\mu\sigma} + h_{\mu\sigma})(\eta^{\sigma\nu} + k^{\sigma\nu}) \\ \delta^{\nu}_{\mu} &= \delta^{\nu}_{\mu} + h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} \end{aligned}$$

其中 δ^{ν}_{μ} 是因爲 $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ 是自身與反矩陣相乘，$\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}$ 同理。此外，我們先前假設微擾很小，因此二階小項 $h_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu}$ 可以忽略。如此，可以得到：

$$k^{\sigma\nu}\eta_{\mu\sigma} = -h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} \tag{2.3}$$

將等式兩邊同時乘上 $\eta^{\rho\mu}$：

$$\begin{aligned} k^{\sigma\nu}\eta_{\mu\sigma}\eta^{\rho\mu} &= -h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu}\eta^{\rho\mu} \\ k^{\sigma\nu}\delta^{\rho}_{\sigma} &= -h_{\mu\sigma}\eta^{\mu\rho}\eta^{\sigma\nu} \end{aligned}$$

由於度規張量可將指標上移或下移，而此時的 $g_{\mu\nu}$ 可近似爲 $\eta_{\mu\nu}$ ，因此可以得到：

$$\boxed{k^{\rho\nu} = -h^{\rho\nu}} \tag{2.4}$$

因此(2.2)式可以改成：

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad |h^{\mu\nu}| \ll 1 \tag{2.5}$$

要特別注意的是，$h^{\mu\nu}$ 並非 $h_{\mu\nu}$ 之反矩陣，而只是用度規張量將指標上移($h^{\mu\nu} = h_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}$)。

2.2 微擾下的時空基本量

在計算基本量前，我們先來計算 $g_{\mu\nu}$ 的微分。由於 $\eta_{\mu\nu}$ 爲常數，微分直接爲 0 ，因此：

$$\boxed{g_{\mu\nu,\alpha} = h_{\mu\nu,\alpha}} \tag{2.6}$$

首先來計算克里斯托福符號(以下簡稱克氏符號)。由定義：

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\sigma\alpha}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \tag{2.7}$$

以及(2.6)式可得到：

$$\begin{aligned}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\,g^{\sigma\alpha}(h_{\alpha\mu,\nu}+h_{\alpha\nu,\mu}-h_{\mu\nu,\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}\,(\eta^{\sigma\alpha}-h^{\sigma\alpha})(h_{\alpha\mu,\nu}+h_{\alpha\nu,\mu}-h_{\mu\nu,\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}\,\eta^{\sigma\alpha}(h_{\alpha\mu,\nu}+h_{\alpha\nu,\mu}-h_{\mu\nu,\alpha})+\frac{1}{2}\,h^{\sigma\alpha}(h_{\alpha\mu,\nu}+h_{\alpha\nu,\mu}-h_{\mu\nu,\alpha})\end{aligned}$$

我們可以假設微擾的改變也不會很大，也就是$|h_{\mu\nu,\alpha}|\ll 1$。如此一來，克式符號在微擾時空下可以被寫成：

$$\boxed{\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\,\eta^{\sigma\alpha}(h_{\alpha\mu,\nu}+h_{\alpha\nu,\mu}-h_{\mu\nu,\alpha})} \tag{2.8}$$

再來我們可以計算黎曼曲率張量，其定義如下：

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}=\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma,\mu}-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma,\nu}+\Gamma^{\gamma}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\gamma}-\Gamma^{\delta}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\delta} \tag{2.9}$$

由(2.8)式可以知道$|\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}|\sim|h_{\mu\nu}|\ll 1$，因此兩個克式符號相乘爲二階小量，可將其忽略。再將剩下的項以(2.8)式替換，可以得到微擾時空下的黎曼曲率張量：

$$\boxed{R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}=\frac{1}{2}\,\eta^{\rho\alpha}(h_{\alpha\nu,\mu\sigma}-h_{\sigma\nu,\mu\alpha}-h_{\alpha\mu,\nu\sigma}+h_{\sigma\mu,\nu\alpha})} \tag{2.10}$$

若將黎曼曲率張量代入$\rho=\mu$，可以得到里奇張量：

$$R_{\sigma\nu}=R^{\mu}{}_{\sigma\mu\nu} \tag{2.11}$$

代入(2.10)式化簡：

$$\begin{aligned}R_{\sigma\nu} &= \frac{1}{2}\,\eta^{\mu\alpha}(h_{\alpha\nu,\mu\sigma}-h_{\sigma\nu,\mu\alpha}-h_{\alpha\mu,\nu\sigma}+h_{\sigma\mu,\nu\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}\,(h^{\mu}_{\nu,\mu\sigma}-\eta^{\mu\alpha}h_{\sigma\nu,\mu\alpha}-h^{\mu}_{\mu,\nu\sigma}+h^{\alpha}_{\sigma,\nu\alpha})\end{aligned}$$

其中，我們定義$h\equiv h^{\mu}_{\mu}$，並且注意到第二項爲「達朗貝爾算符」：

$$\Box^2\equiv\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu=\partial_\mu\partial^\mu \tag{2.12}$$

因此：

$$\boxed{R_{\sigma\nu}=\frac{1}{2}\,(h^{\mu}_{\nu,\mu\sigma}+h^{\alpha}_{\sigma,\nu\alpha}-\Box^2 h_{\nu\sigma}-h_{,\nu\sigma})} \tag{2.13}$$

若再將里奇張量的σ上移成μ，可以得到里奇純量曲率：

$$\boxed{R=R^{\nu}_{\nu}=\eta^{\sigma\nu}R_{\sigma\nu}=h^{\mu\sigma}{}_{,\mu\sigma}-\Box^2 h} \tag{2.14}$$

2.3 愛因斯坦張量

首先，我們定義一個微擾度規的變體：

$$\boxed{\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}h} \tag{2.15}$$

場方程中，愛因斯坦張量被定義成：

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R} \tag{2.16}$$

代入(2.1)式、(2.13)式、(2.14)式，並以(2.15)式替換化簡得：

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(\bar{h}^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} + \bar{h}^{\alpha}{}_{\mu,\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\sigma\alpha}{}_{,\sigma\alpha} - \Box^2\bar{h}_{\mu\nu})} \tag{2.17}$$

3 規範變換

由於(2.17)式並未給出一個漂亮的形式，我們可以利用一些方法巧妙的消除其中的自由度。這個方法被稱作是「規範(Gauge)」，他可以使得物理計算更加方便，並且簡化物理現象的描述。

3.1 勞倫茲規範

勞倫茲提出了一個能夠化簡(2.17)式的一個規範，稱爲「勞倫茲規範(Lorentz Gauge)」：

$$\boxed{\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0} \tag{3.1}$$

由此，我們來計算(2.17)式的前三項：

$$\begin{cases} \bar{h}^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} = \eta_{\beta\nu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\mu} = \eta_{\beta\nu}(\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta})_{,\mu} = 0 \\ \bar{h}^{\alpha}{}_{\mu,\nu\alpha} = \eta_{\beta\mu}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\nu} = \eta_{\beta\mu}(\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta})_{,\nu} = 0 \\ \eta_{\mu\nu}\bar{h}^{\sigma\alpha}{}_{,\sigma\alpha} = \eta_{\mu\nu}(\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta})_{,\alpha} = 0 \end{cases}$$

因此(2.17)式只會剩下最後一項：

$$\boxed{G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box^2\bar{h}_{\mu\nu}} \tag{3.2}$$

由愛因斯坦的場方程式

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.3}$$

可以推導出 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 所滿足的微分方程：

$$\boxed{\Box^2\bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}} \tag{3.4}$$

這個就是有源($T_{\mu\nu}$)的波動方程(Wave Equation)。

3.2 位移場

由於任意的坐標系不一定可以滿足勞倫茲規範，因此我們需要位移場(Displacement Field)來找到一個滿足規範的坐標系。定義位移場 ξ^α 爲：

$$\tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha, \quad |\xi^\alpha| \ll 1 \text{ and } |\xi^\alpha{}_{,\beta}| \ll 1 \tag{3.5}$$

接著，我們可以計算變換矩陣

$$\boxed{\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}} \tag{3.6}$$

以及

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} = \delta^\alpha_\beta - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\beta} = \delta^\alpha_\beta - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma}\left(\delta^\sigma_\beta - \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \tilde{x}^\beta}\right)$$

由於 ξ^α 及其微分皆遠小於 1，可以忽略最後的二階小項。因此可得：

$$\boxed{\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} = \delta^\alpha_\beta - \xi^\alpha{}_{,\beta}} \tag{3.7}$$

接下來，我們來用位移場變換度規張量：

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta}\, g_{\mu\nu} \\
&= (\delta^\mu_\alpha - \xi^\mu{}_{,\alpha})(\delta^\nu_\beta - \xi^\nu{}_{,\beta})(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\
&= (\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\alpha\xi^\nu{}_{,\beta} - \delta^\nu_\beta\xi^\mu{}_{,\alpha} + \xi^\nu{}_{,\beta}\xi^\mu{}_{,\alpha})(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\
&= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - (\delta^\mu_\alpha\xi^\nu{}_{,\beta} + \delta^\nu_\beta\xi^\mu{}_{,\alpha})(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})
\end{aligned}$$

上面的第三行中，前括號中的第四項爲二階小項，直接將其忽略。而最後一行後面兩個括號乘開後 $\xi^\nu{}_{,\beta}h_{\mu\nu}$ 爲二階小項，將其忽略；前項則爲 $g_{\alpha\beta}$。注意到 $\eta_{\mu\beta}\xi^\mu{}_{,\alpha} = \xi_{\beta,\alpha}$。因此可得：

$$\boxed{\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}} \tag{3.8}$$

由於 $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \tilde{\eta}_{\alpha\beta} + \tilde{h}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \tilde{h}_{\alpha\beta}$，因此：

$$\boxed{\tilde{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}} \tag{3.9}$$

再來，我們將上式代入(2.10)式計算黎曼曲率張量：

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu} &= \frac{1}{2}\,\eta^{\rho\alpha}(\tilde{h}_{\alpha\nu,\mu\sigma} - \tilde{h}_{\sigma\nu,\mu\alpha} - \tilde{h}_{\alpha\mu,\nu\sigma} + \tilde{h}_{\sigma\mu,\nu\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}\,\eta^{\rho\alpha}\begin{pmatrix} h_{\alpha\nu,\mu\sigma} - \xi_{\alpha,\nu\mu\sigma} - \xi_{\nu,\alpha\mu\sigma} - h_{\sigma\nu,\mu\alpha} + \xi_{\sigma,\nu\mu\alpha} + \xi_{\nu,\sigma\mu\alpha} \\ -h_{\alpha\mu,\nu\sigma} + \xi_{\alpha,\mu\nu\sigma} + \xi_{\mu,\alpha\nu\sigma} + h_{\sigma\mu,\nu\alpha} - \xi_{\sigma,\mu\nu\alpha} - \xi_{\mu,\sigma\nu\alpha} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

因爲微分沒有順序，消去相同的項可以得到：

$$\boxed{\tilde{R}^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}} \tag{3.10}$$

這個告訴我們在位移場變換下曲率並不會改變。比照(2.15)式，我們定義位移場微擾：

$$\boxed{\overline{\tilde{h}_{\mu\nu}} = \tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\tilde{h}} \tag{3.11}$$

將上式以(3.9)式替換 $\tilde{h}_{\mu\nu}$ 計算位移場微擾：

$$\begin{aligned}
\overline{\tilde{h}_{\mu\nu}} &= \tilde{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\tilde{h}_{\alpha\beta} \\
&= (h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}) - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}) \\
&= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}h - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\xi_{\alpha,\beta} + \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\xi_{\beta,\alpha}
\end{aligned}$$

注意到 $\eta^{\alpha\beta}\xi_{\beta,\alpha} = \xi^{\alpha}{}_{,\alpha}$ ，因此可得：

$$\boxed{\overline{\tilde{h}_{\mu\nu}} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\sigma}{}_{,\sigma}} \tag{3.12}$$

在來我們利用 $\eta_{\mu\nu}$ 將指標上移：

$$\begin{aligned}
\overline{\tilde{h}^{\alpha\beta}} &= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\overline{\tilde{h}_{\mu\nu}} \\
&= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(\bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\sigma}{}_{,\sigma}) \\
&= \bar{h}^{\alpha\beta} - \eta^{\nu\beta}\xi^{\alpha}{}_{,\nu} - \eta^{\mu\alpha}\xi^{\beta}{}_{,\mu} + \eta^{\alpha\beta}\xi^{\sigma}{}_{,\sigma}
\end{aligned}$$

再將其對 x^{β} 作微分，可得：

$$\overline{\tilde{h}^{\alpha\beta}}{}_{,\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \eta^{\nu\beta}\xi^{\alpha}{}_{,\nu\beta} - \eta^{\mu\alpha}\xi^{\beta}{}_{,\mu\beta} + \eta^{\alpha\beta}\xi^{\sigma}{}_{,\sigma\beta} \tag{3.13}$$

注意到後面兩項在替換標記的時候會是相同的，因此：

$$\boxed{\overline{\tilde{h}^{\alpha\beta}}{}_{,\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \Box^2\xi^{\alpha}} \tag{3.14}$$

若原本的 $\bar{h}^{\alpha\beta}$ 不滿足勞倫茲規範，則我們可以選擇滿足 $\Box^2\xi^{\alpha} = \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$ 的 ξ^{α} 去位移坐標系使得：

$$\overline{\tilde{h}^{\alpha\beta}}{}_{,\beta} = 0 \tag{3.15}$$

注意到，ξ^{α} 並非唯一，因爲對於任何 χ^{α} 滿足 $\Box^2\chi^{\alpha} = 0$ 皆有

$$\Box^2(\xi^{\alpha} + \chi^{\alpha}) = \Box^2\xi^{\alpha} \tag{3.16}$$

3.3 自由度的消除

眞空中，在勞倫茲規範下可以導出重力波動方程：

$$\Box^2\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{3.17}$$

此方程式其中一個解就是平面波。令 $k^{\mu} = \left({}^{\omega}/_{c}, \vec{k}\right)$ ，則解的形式爲：

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{i(-\omega t + k_1x + k_2y + k_3z)} = A_{\mu\nu}e^{ik_{\sigma}x^{\sigma}} \tag{3.18}$$

首先，我們將上式代入波動方程：

$$0 = \Box^2\bar{h}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu,\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}(ik_{\alpha})(ik_{\beta})\bar{h}_{\mu\nu} = -k_{\alpha}k^{\alpha}\bar{h}_{\mu\nu} \tag{3.19}$$

可得：

$$|k|^2 = k_{\alpha}k^{\alpha} = 0 \tag{3.20}$$

我們知道四維向量如果長度爲零，則說明他是「類光性(light-like)」，也從另一個角度告訴我們重力波是以光速傳遞的。

四維時空中，$A_{\mu\nu}$ 有 16 個分量，但由於 $A_{\mu\nu}$ 爲對稱張量($g_{\mu\nu}$ 對稱 $\rightarrow \bar{h}_{\mu\nu}$ 對稱)，因此只剩下 10 個有用的分量(自由度)。

若我們將(3.18)式代入勞倫茲規範中，我們可以得到：

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = ik_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.21}$$

也就是

$$k_\beta A^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.22}$$

或是乘上度規張量轉換一下上下標：

$$k^\nu A_{\mu\nu} = 0 \tag{3.23}$$

我們可以將上式看成是向量乘上一個矩陣。我們知道一個方程式如果有 n 個未知數，則事實上只有 $n-1$ 個是獨立變數，也就是說一條方程式可以消去一個自由度。因此，因爲上式在四維時空中，共代表四條方程式，可以消去 4 個自由度，使得 $A_{\mu\nu}$ 只剩下 6 個自由度。

3.4 橫向無跡規範

由於位移場 ξ^α 並非唯一，在四維時空中擁有四個自由度，又根據(3.12)式，$\bar{h}_{\alpha\beta}$ 由 ξ^α 決定，且 $A_{\mu\nu}$ 也與 $\bar{h}_{\alpha\beta}$ 有關，因此 $A_{\mu\nu}$ 仍有四個自由度。只要有自由度，我們就可以定義一些規範來去消除這些不重要的東西，使式子更爲簡潔。

橫向無跡規範(Transverse-Traceless Gauge, TT Gauge)中包含 3 個橫向約束與 1 個無跡約束：

- 橫向約束(Transverse Gauge)
  假設有一個速度爲 $\vec{U} = U^\mu \hat{e}_\mu$ 的觀察者，其速度與振幅方向正交(垂直)，也就是：

  $$A_{\mu\nu} U^\mu = 0 \tag{3.24}$$

  但是，爲甚麼是三個約束? 前面不是有說一個方程式消除一個自由度嗎?

  現在我們選擇 $U^\mu = (U^t, \vec{0})$，代入(3.24)式不難得到：

  $$A_{\mu t} = A_{t\mu} = 0 \tag{3.25}$$

  事實上，上式在中 $\mu = t$ 時滿足了，因爲波的前進方向與 $\vec{U}$ 相同(與振幅正交)。因此我們知道橫向約束與勞倫茲規範有一個條件是重疊的，因此將橫向約束視爲 3 個條件。

- 無跡約束(Traceless Gauge)
  顧名思義，就是讓 $\mathrm{tr}(A_{\mu\nu}) = A^\mu_\mu = 0$，或者 $-A_{tt} + A_{xx} + A_{yy} + A_{zz} = 0$

  進一步，我們可以知道：

  $$\bar{h}^\mu_\mu = \bar{h} = 0 \tag{3.26}$$

將(2.15)式乘上一個 $\eta^{\mu\nu}$ 上移所有 ν 指標：

$$\bar{h}^{\mu}_{\mu} = h^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}_{\mu} h \tag{3.27}$$

又由(3.26)式可知左式爲 0，且 $\delta^{\mu}_{\mu} = 4$，因此可推得

$$h = 0 \tag{3.28}$$

因此在橫向無跡規範中，(2.15)式將變爲：

$$\boxed{\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}} \tag{3.29}$$

4 重力波

此章會討論粒子在重力波下如何運動，引出重力波的偏振現象，並探討重力波是如何產生的。

4.1 微擾度規的簡化

前一章我們提到了如何利用度規消除自由度，並且最後透過橫向無跡規範消去到僅剩下2個自由度，也就是說振幅只會有兩個變數。

現在考慮 $\vec{U} = c\hat{e}_t$ 、 $\vec{k} = \left({}^{\omega}\!/_{c}, 0, 0, {}^{\omega}\!/_{c}\right)$ 以及條件一些條件：對稱性

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu} \tag{4.1}$$

勞倫茲規範

$$A_{\mu\nu}k^{\mu} = 0 \tag{4.2}$$

橫向規範

$$A_{\mu\nu}U^{\mu} = 0 \tag{4.3}$$

以及無跡規範

$$A^{\mu}_{\mu} = 0 \tag{4.4}$$

現利用(4.3)式可推得

$$A_{t\mu} = A_{\mu t} = 0 \tag{4.5}$$

再由上式代入(4.2)式得出：

$$A_{\mu\nu}k^{\mu} = A_{t\nu}k^{t} + A_{z\nu}k^{z} = A_{z\nu}\,{}^{\omega}\!/_{c} = 0 \tag{4.6}$$

因此

$$A_{z\mu} = A_{\mu z} = 0 \tag{4.7}$$

再由(4.4)式可以知道：

$$A_{xx} + A_{yy} = 0 \tag{4.8}$$

因此可以得到 $A_{\mu\nu}$ 的矩陣形式：

$$A_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

4.2 以粒子運動看偏振

由(??)式可以看出來，$h_{\mu\mu}$ 只有 xy 分量，因此我們只考慮粒子在 $x-y$ 平面上的運動。假設粒子速度 $\vec{v} = v^x \hat{e}_x + v^y \hat{e}_y$，計算其速度大小：

$$\begin{aligned} v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} \\ &= (v^x)^2 g_{xx} + 2v^x v^y g_{xy} + (v^y)^2 g_{yy} \\ &= (v^x)^2(\eta_{xx} + h_{xx}) + (v^y)^2(\eta_{yy} + h_{yy}) + 2v^x v^y(\eta_{xy} + h_{xy}) \end{aligned}$$

注意到 $\eta_{xy} = 0$ 且 $h_{\mu\nu}$ 可以寫作

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{ik_\sigma x^\sigma} \tag{4.10}$$

代回前式可以得到：

$$\boxed{v^2 = \Big[(v^x)^2 + (v^y)^2\Big] + \Big[\big((v^x)^2 - (v^y)^2\big)A_+ + 2v^x v^y A_\times\Big] e^{ik_\sigma x^\sigma}} \tag{4.11}$$

由此來討論以下幾種情形：

- 如下圖，考慮粒子僅 x 方向之速度運動，並以此情形化簡(4.11)式之後項可得：

$$\Delta_{v^2} = A_+ (v^x)^2 e^{ik_\sigma x^\sigma} \tag{4.12}$$

- 如下圖，考慮粒子僅 y 方向之速度運動，並以此情形化簡(4.11)式之後項可得：

$$\Delta_{v^2} = -A_+ (v^y)^2 e^{ik_\sigma x^\sigma} = A_+ (v^y)^2 e^{i(k_\sigma x^\sigma + \pi)} \tag{4.13}$$

由上面兩點可以看出來單純 v^x 與 v^y 的偏移量都是由 A_+ 提供，也就是所謂的「十字型偏振」。

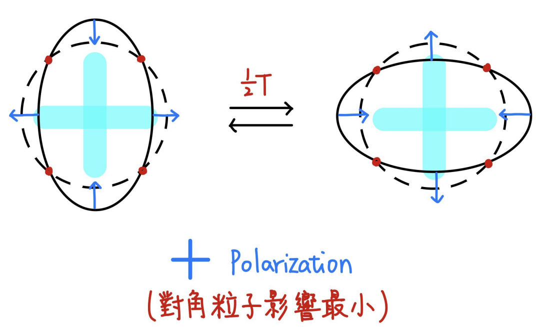


圖 1: 十字型偏振(Plus Polarization)

- 如下圖，考慮粒子以 $45°$ 在一三象限運動，並以此情形化簡(4.11)式之後項可得：

$$\Delta_{v^2} = \Big[(\mathbf{0})A_+ + 2v^x v^y A_\times\Big]e^{ik_\sigma x^\sigma} = A_\times \cdot 2u^2 e^{ik_\sigma x^\sigma} \tag{4.14}$$

  注意到因爲 $v^x = v^y$，所以第一項爲 0，並定義其值爲 u。

- 如下圖，考慮粒子以 $45°$ 在二四象限運動，並以此情形化簡(4.11)式之後項可得：

$$\Delta_{v^2} = -A_\times \cdot 2u^2 e^{ik_\sigma x^\sigma} = A_\times \cdot 2u^2 e^{i(k_\sigma x^\sigma + \pi)} \tag{4.15}$$

  注意到此時 $v^x = -v^y$，定義其一爲 u，另一爲 $-u$。

由上面兩點可以看出來斜向 $45°$ 運動的偏移量都是由 $A_\times$ 提供，也就是所謂的「交叉型偏振」。

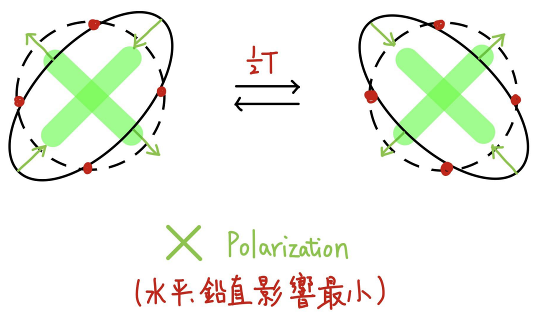


圖 2: 交叉形偏振(Cross Polarization)

4.3 重力波源

如果不是在眞空中討論，愛因斯坦方程需要加上能量-動量張量($T_{\mu\nu}$)討論。在前面(3.4)式寫過方程式：

$$\Box^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu} \tag{4.16}$$

電磁學中，我們討論過波動方程是柏松方程的含時版，需以「推遲勢(Retarded Potential)」來考慮。類比推遲勢可以得到：

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{1}{\lambda} T_{\mu\nu} \left(t - \frac{\lambda}{c}, \vec{r}' \right) d\tau', \quad \vec{\lambda} = \vec{r} - \vec{r}' \tag{4.17}$$

其中，$\vec{r}$ 爲場點位置、$\vec{r}'$ 爲場源位置，$d\tau'$ 爲場源微小體積元。若考慮在很遠的地方討論場源之影響，也就是 $r \gg r'$，則上式可以近似成：

$$\boxed{\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{r}) \approx \frac{4G}{c^4 r} \int T_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{r}' \right) d\tau'} \tag{4.18}$$

由能量-動量守恆式：

$$\boxed{T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0} \tag{4.19}$$

定義 $k, i = 1, 2, 3$，則上式可改寫爲：

$$\begin{cases} T^{00}{}_{,0} + T^{0k}{}_{,k} = 0 \\ T^{i0}{}_{,0} + T^{ik}{}_{,k} = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

考慮 $T^{ik} x^j$ 對 x^k 的微分：

$$\left(T^{ik} x^j \right)_{,k} = T^{ik}{}_{,k}\, x^j + T^{ik} \delta^j_k = T^{ik}{}_{,k}\, x^j + T^{ij} \tag{4.21}$$

若把兩邊對全空間作積分，左式因爲是散度可以轉爲面積分，但 $T_{\mu\nu}$ 在無窮遠處爲 0，因此左式積分完爲 0。故可得：

$$\int T^{ij}\, d\tau = -\int T^{ik}{}_{,k}\, x^j\, d\tau \tag{4.22}$$

再代入(4.20)式化簡可以得到：

$$\int T^{ij}\, d\tau = \int T^{i0}{}_{,0}\, x^j\, d\tau = \frac{d}{dt} \int T^{i0}\, x^j\, d\tau = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (T^{i0}\, x^j + T^{j0}\, x^i)\, d\tau \tag{4.23}$$

考慮 $T^{0k} x^i x^j$ 對 x^k 的微分：

$$\left(T^{0k} x^i x^j \right)_{,k} = T^{0k}{}_{,k}\, x^i x^j + T^{0k}\, x^j \delta^i_k + T^{0k}\, x^i \delta^j_k = T^{0k}{}_{,k}\, x^i x^j + T^{i0}\, x^j + T^{j0}\, x^i \tag{4.24}$$

同樣的，左式對全空間積分後爲 0，因此：

$$\int (T^{i0}\, x^j + T^{j0}\, x^i)\, d\tau = -\int T^{0k}{}_{,k}\, x^i x^j\, d\tau \tag{4.25}$$

再代入(4.20)式化簡可以得到：

$$\int (T^{i0}\,x^j + T^{j0}\,x^i)\,d\tau = \int T^{00}{}_{,0}\,x^i x^j\,d\tau = \frac{d}{dt}\int T^{00} x^i x^j\,d\tau \tag{4.26}$$

綜合(4.23)式與(4.26)式可以得到：

$$\boxed{\int T^{ij}\,d\tau = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int T^{00} x^i x^j\,d\tau} \tag{4.27}$$

對愛因斯坦方程做因次分析，可以得到 $T_{\mu\nu}$ 的因次：

$$[T_{\mu\nu}] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \tag{4.28}$$

事實上，T^{00} 的物理意義就式質量密度(質能等價)，只是要乘上 c^2 做修正，也就是：

$$\boxed{T^{00} = c^2\rho} \tag{4.29}$$

將(4.27)式及(4.29)式代入(4.18)式中即可得到：

$$\bar{h}^{ij} = \frac{2G}{c^2 r}\frac{d^2}{dt^2}\left[\int \rho(t',\vec{r}) x^i x^j\,d\tau\right]_{t'=t-r/c} \tag{4.30}$$

定義含跡四極矩爲：

$$q_{ij} = \int \rho x_i x_j\,d\tau \tag{4.31}$$

故：

$$\boxed{\bar{h}_{ij}(t,\vec{r}) = \frac{2G}{c^2 r}\,\ddot{q}_{ij}\Big|_{t'=t-r/c}} \tag{4.32}$$

因爲輻射功率會與 $\bar{h}_{ij}$ 時變率的平方有關，經過一些計算後可以得到：

$$\boxed{P(t,r) = \frac{G}{45c^5}\left[\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}^{ij}\right]_{t'=t-r/c}} \tag{4.33}$$

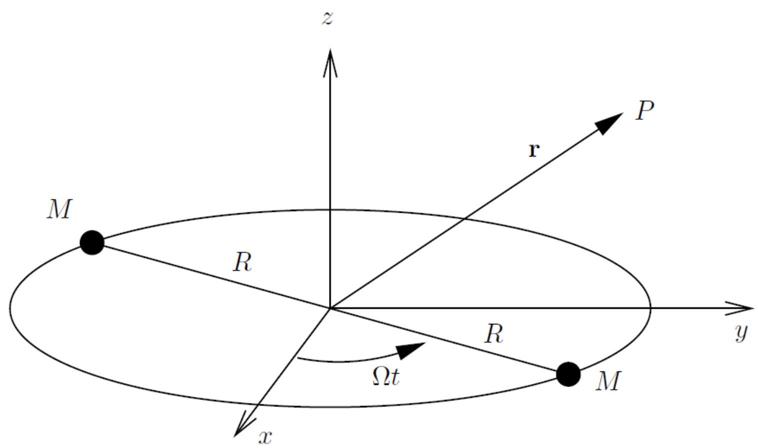
其中 Q_{ij} 爲質量四極矩：

$$\boxed{Q_{ij} = \int \rho\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)d\tau} \tag{4.34}$$

5 習題

5.1 雙星系統的軌道半徑衰減

考慮一個由兩個質量爲M的中子星組成的雙星系統，兩者以距離$2R$作角速率ω的圓周運動。如下圖，現在假設兩個中子星的質心爲O點，繞行平面爲xy平面。



試回答以下問題：

(1) 以M、R及相關物理常數表示ω

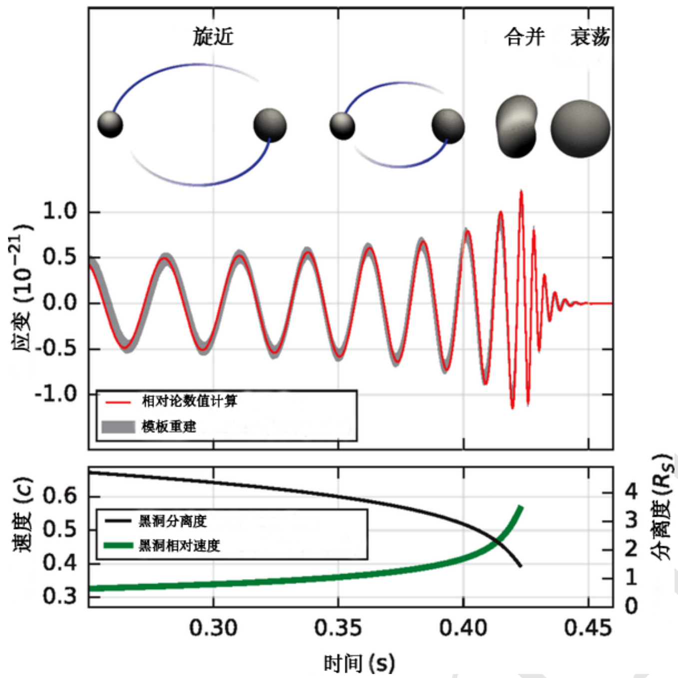
(2) 求系統總能量

(3) 求出雙星所造成的四極矩

(4) 求出由重力波輻射造成的能量衰減功率

(5) 因爲系統能量會由重力波輻射耗散，因此軌道半徑也會跟著縮小。假設耗散功率遠小於系統能量，試求在雙星距離$2R$時的半徑衰減率

5.2 GW-150914



2015年9月14日，雷射干涉重力波天文台(Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, LIGO)首次在美國華盛頓州漢福德與路易斯安那州利文斯頓探測到了重力波GW-150914，其是由兩個大質量黑洞互繞所放出的重力波。