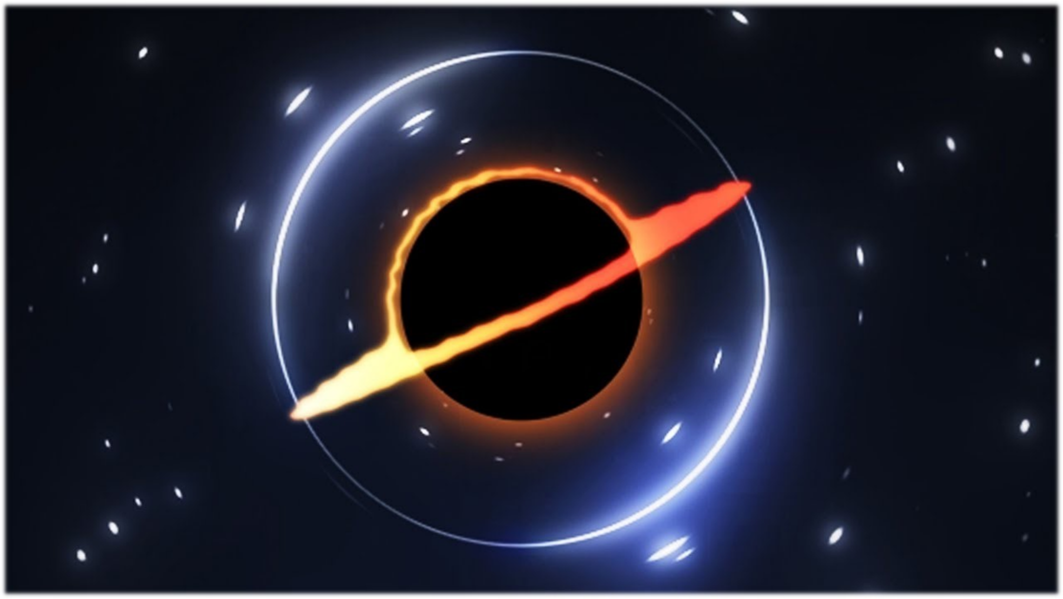
廣義相對論中的數學



Chocomint

August 2022

目錄

1 愛因斯坦標記法

愛因斯坦標記法(Einstein Notation)是一種標記約定，當一個單獨項目內有標號變數出現兩次，一次是上標，一次是下標時，則必須總和所有這單獨項目的可能值。

例如在三維空間中

$$y = c_i\, x^i \tag{1}$$

代表的是

$$y = \sum_{i=1}^{3} c_i\, x^i = c_1\, x^1 + c_2\, x^2 + c_3\, x^3 \tag{2}$$

特別注意此處的上標並不是指數，而是標記不同的座標。

這個表示法也常常在線性代數中來表示一個向量：

$$\vec{v} = (v^1, v^2, v^3) = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3 = v^\alpha\vec{e}_\alpha \tag{3}$$

2 測地線

2.1 測地線方程

一物體若在測地線上移動，速度不隨時間改變，即滿足方程：

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} = 0 \tag{4}$$

注意這邊用的「時間」是「固有時間」，在相對論中時間也是會受到一些因素影響

利用愛因斯坦標記法

$$\vec{v} = v^0\vec{e}_0 + v^1\vec{e}_1 + \cdots = v^\alpha\vec{e}_\alpha \tag{5}$$

將(5)代入(4)

$$\frac{d(v^\alpha\vec{e}_\alpha)}{d\tau} = v^\alpha\,\frac{d\,\vec{e}_\alpha}{d\tau} + \frac{dv^\alpha}{d\tau}\,\vec{e}_\alpha = 0 \tag{6}$$

(6)式中，有一項是單位向量($\vec{e}_\alpha$)對時間的微分，不好處理。因此，我們需要引進一個新的符號來表達單位向量的變化。

2.2 克里斯多福符號

克里斯多福符號(Christoffel Symbol, 或稱作「克氏符號」)是一種描述單位向量($\vec{e}_\alpha$)「變化」的符號，以符號Γ表示。由單位向量定義：

$$\frac{d\,\vec{e}_\mu}{dx^\nu} \equiv \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\,\vec{e}_\alpha \tag{7}$$

由(7)可導出以克氏符號表示單位向量對時間的變化：

$$\frac{d\,\vec{e}_\alpha}{d\tau} = \frac{d\,\vec{e}_\alpha}{dx^\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau} = \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\,\vec{e}_\gamma\,v^\beta \tag{8}$$

將(8)代入(6)

$$v^\alpha v^\beta\,\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\,\vec{e}_\gamma + \frac{dv^\alpha}{d\tau}\,\vec{e}_\alpha = 0 \tag{9}$$

將上式左項的$\alpha \to \mu$, $\beta \to \nu$, $\gamma \to \alpha$，代換後：

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\,v^\mu\,v^\nu\,\vec{e}_\alpha + \frac{dv^\alpha}{d\tau}\,\vec{e}_\alpha = 0 \tag{10}$$

移項消去$\vec{e}_\alpha$，即得測地線方程(Geodesic Equation)：

$$\frac{dv^\alpha}{d\tau} = -\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\,v^\mu\,v^\nu \tag{11}$$

3 度規張量

3.1 定義

度規張量(Metric Tensor)是用來衡量度量空間中距離、面積及角度的「二階張量」。用白話文講就是決定了網格的「形狀」

度規張量的定義：

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{12}$$

兩邊都除以 $(dt)^2$

$$\|\vec{v}\|^2 = g_{\mu\nu}\, v^\mu\, v^\nu \tag{13}$$

特別注意，速度的大小永遠是光速 c

$$c^2 = g_{\mu\nu}\, v^\mu\, v^\nu \tag{14}$$

3.2 與克氏符號的關係

克氏符號的另一個定義法：

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{g^{\gamma\sigma}}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}\right) \tag{15}$$

其中，$g^{\gamma\sigma}$ 是 $g_{\gamma\sigma}$ 的反矩陣(inverse)，通常這是很難計算的。巧的是，我們可以選擇適當的座標系來畫簡(15)式。如果任兩座標軸相互垂直，也就是選擇「正交座標系」的話，可化簡爲：

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2g_{\gamma\gamma}}\left(\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right) \tag{16}$$

4 曲率

4.1 基本概念

如果我們嘗試著去用不同的路徑轉移一向量，可能會得到不同的結果。

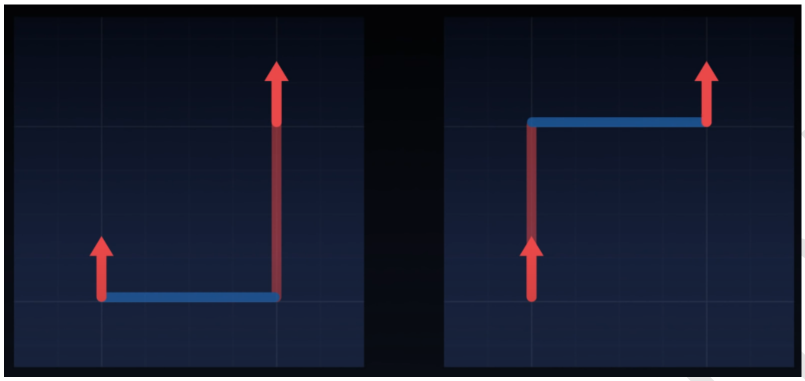


圖 1: 平面向量轉移

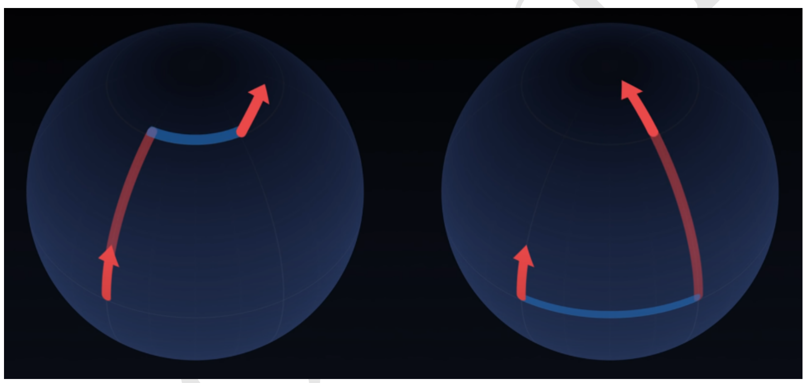


圖 2: 球面向量轉移

我們可以注意到，向量在有彎曲的面上移動時，移動的路徑會影響向量的最終的方向。由此，我們可以定義出曲率。

4.2 黎曼曲率張量

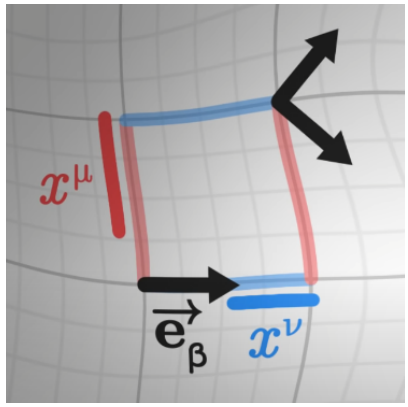


圖 3: 曲率圖示

左上兩個向量的差定義爲曲率向量：

$$\vec{R} = \frac{d}{dx^\mu}\frac{d}{dx^\nu}\vec{e}_\beta - \frac{d}{dx^\nu}\frac{d}{dx^\mu}\vec{e}_\beta \tag{17}$$

同樣的，使用克氏符號化簡(17)式：

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{d}{dx^\mu}(\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}\,\vec{e}_\alpha) - \frac{d}{dx^\nu}(\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\,\vec{e}_\alpha) \\ &= \frac{d\,\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}}{dx^\mu}\,\vec{e}_\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}\,\frac{d\,\vec{e}_\alpha}{dx^\mu} - \frac{d\,\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}}{dx^\nu}\,\vec{e}_\alpha - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}\,\frac{d\,\vec{e}_\alpha}{dx^\nu} \\ &= \frac{d\,\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}}{dx^\mu}\,\vec{e}_\alpha + \Gamma^\lambda{}_{\beta\nu}\,\Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu}\,\vec{e}_\alpha - \frac{d\,\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}}{dx^\nu}\,\vec{e}_\alpha - \Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}\,\Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}\,\vec{e}_\alpha\end{aligned}$$

最後，我們得到「黎曼曲率張量(Riemann Curvature Tensor)」定義式：

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \frac{d\,\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}}{dx^\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\beta\nu}\,\Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} - \frac{d\,\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}}{dx^\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\beta\mu}\,\Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu} \tag{18}$$

4.3 里奇張量

在四維時空中，若要以黎曼曲率來描述時空的彎曲，需要由256個部分來描述，過於複雜。因此，里奇定義一個更好描述的張量–里奇張量(Ricci Tensor)。

由黎曼曲率張量表示：

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \tag{19}$$

然而 $R_{\mu\nu}$ 仍是一個二階張量，因此，我們可以用一個純量–里奇純量曲率(Ricci Scalar)來表達：

$$R = g^{\mu\nu}\,R_{\mu\nu} \tag{20}$$

4.4 要怎麼算?

以球面爲例，度規張量可表示爲：

$$g_{(\theta,\phi)} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\cos^2\theta \end{bmatrix} \tag{21}$$

對各分量去作微分：

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\theta} &= 0 & \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\phi} &= 0 \\ \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial\theta} &= 0 & \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial\phi} &= 0 \\ \frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial\theta} &= 0 & \frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial\phi} &= 0 \\ \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\theta} &= -2r^2\cos\theta\sin\theta & \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial\phi} &= 0 \end{aligned}$$

計算各克氏符號：

$$\begin{array}{llll} \Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} = 0 & \Gamma^{\theta}{}_{\theta\phi} = 0 & \Gamma^{\theta}{}_{\phi\theta} = 0 & \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = \cos\theta\sin\theta \\ \Gamma^{\phi}{}_{\theta\theta} = 0 & \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = -\tan\theta & \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = -\tan\theta & \Gamma^{\phi}{}_{\phi\phi} = 0 \end{array}$$

再計算黎曼曲率張量的各分量：

$$\begin{array}{llll} R^{\theta}{}_{\theta\theta\theta} = 0 & R^{\theta}{}_{\theta\theta\phi} = 0 & R^{\theta}{}_{\theta\phi\theta} = 0 & R^{\theta}{}_{\theta\phi\phi} = 0 \\ R^{\theta}{}_{\phi\theta\theta} = 0 & R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = \cos^2\theta & R^{\theta}{}_{\phi\phi\theta} = -\cos^2\theta & R^{\theta}{}_{\phi\phi\phi} = 0 \\ R^{\phi}{}_{\theta\theta\theta} = 0 & R^{\phi}{}_{\theta\theta\phi} = -1 & R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = 1 & R^{\phi}{}_{\theta\phi\phi} = 0 \\ R^{\phi}{}_{\phi\theta\theta} = 0 & R^{\phi}{}_{\phi\theta\phi} = 0 & R^{\phi}{}_{\phi\phi\theta} = 0 & R^{\phi}{}_{\phi\phi\phi} = 0 \end{array}$$

里奇張量：

$$\begin{array}{ll} R_{\theta\theta} = 1 & R_{\theta\phi} = 0 \\ R_{\phi\theta} = 0 & R_{\phi\phi} = \cos^2\theta \end{array}$$

最後得到里奇純量曲率：

$$R = \frac{2}{r^2} \tag{22}$$

5 能量-動量張量

根據愛因斯坦的質能轉換公式可以知道，能量與質量是等價的。一個運動中的物體可以視爲一能量流，在坐標系中我們可以去描述他穿過特定面的通量。

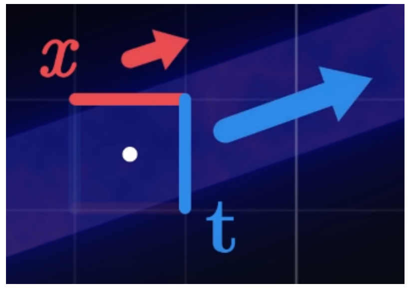


圖 4: 能量流

在 $1+1$ 維時空中，通過 x 方向的能量通量可以表示成 (T_{xt}, T_{xx})；通過 t 方向的能量通量可以表示成 (T_{tt}, T_{tx})，因此，在一維時空中的能量-動量張量可以表示爲：

$$T = \begin{bmatrix} T_{tt} & T_{tx} \\ T_{xt} & T_{tt} \end{bmatrix} \tag{23}$$

T_{tt} 是表示通過 t 方向的通量的 t 分量，此項表示有多少能量穿過穿過該點朝未來移動。此項常稱爲「能量密度(Energy Density)」

$T_{tx} = T_{xt}$ 表示有多少能量隨時間在空間中傳播，常稱爲「動量密度(Momentum Density)」

T_{xx} 表示能量通過空間傳遞的運動有多少，也就是「壓力(Pressure)」

事實上，在四維時空中，我們的能量-動量張量會長這樣

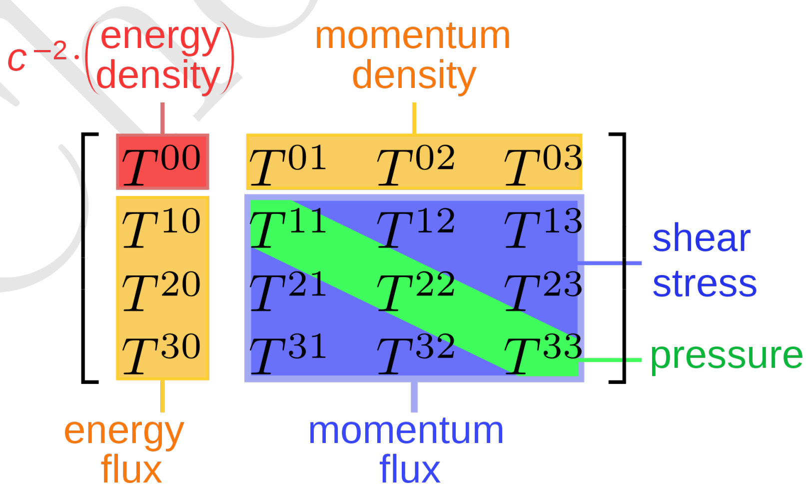


圖 5: 四維時空中的能量-動量張量

6 愛因斯坦方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{24}$$

我們可以觀察到左式包含了里奇張量 $R_{\mu\nu}$、里奇純量曲率 R、度規張量 $g_{\mu\nu}$ 等描述時空幾何形狀的量；而右式則是包含能量-動量張量，用來描述時空中的能量動量分布。

因此，我們可以知道，愛因斯坦方程是一條聯繫空間與能量的方程式，將時空的形狀與時空中的能量相互對應。

6.1 另一種表達形式

在四維時空中，我們常使用另一個對稱方程式來代替原方程：

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T\, g_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} R_{\mu\nu} \tag{25}$$

其中，$T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$

6.2 真空場方程

真空中，我們知道能量-動量張量爲零。將 $T_{\mu\nu} = 0$ 代入(25)式，不難發現：

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{26}$$

6.3 史瓦西度規

考慮一個在孤立宇宙中質量爲 M 、不帶電且靜止不動的正圓球體。由(26)式，我們可以看到雖然此方程看起來很簡潔，但這包含了數個微分方程，解起來相當繁瑣。

首先要假設一個度規，將其代入(16)及(18)，解一連串的微分方程，最後再由「牛頓極限」：

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \tag{27}$$

最後可以解出「史瓦西度規(Schwarzschild Metric)」：

$$g_{(t,r,\theta,\phi)} = \begin{bmatrix} -\left(c^2 - \frac{2GM}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{28}$$

7 其他度規的精確解

7.1 克爾度規(Kerr Metric)

克爾度規是描述一旋轉、球對稱之質量龐大物體(例如：黑洞)所影響周遭眞空區域的時空幾何若以 $(ds)^2$ 表示：

$$\begin{aligned}(ds)^2 = &-\left(1-\frac{r_s r}{\Sigma}\right)c^2(dt)^2 - \frac{2r_s r a\sin^2\theta}{\Sigma}c\,dt\,d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}(dr)^2 \\ &+\Sigma(d\theta)^2 + \left(r^2+a^2+\frac{r_s r a^2}{\Sigma}\right)\sin^2\theta(d\phi)^2 \end{aligned} \tag{29}$$

矩陣形式：

$$g_{(t,r,\theta,\phi)} = \begin{bmatrix} -\left(1-\frac{r_s r}{\Sigma}\right)c^2 & 0 & 0 & -\frac{r_s r a\sin^2\theta}{\Sigma}c \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -\frac{r_s r a\sin^2\theta}{\Sigma}c & 0 & 0 & \left(r^2+a^2+\frac{r_s r a^2}{\Sigma}\right)\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{30}$$

特別注意，這邊的 (r,θ,ϕ) 所用的坐標系是「扁球面坐標系(Oblate Spheroidal Coordinate)」：

$$\begin{cases} x = \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\cos\phi \\ y = \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{31}$$

其中：

$$\begin{cases} r_s = \dfrac{2GM}{c^2} \\ \Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta \\ \Delta = r^2 - r_s r + a^2 \end{cases} \tag{32}$$

M 爲旋轉物體質量；a 稱爲自轉參數，由角動量 J 定義爲：

$$a = \frac{J}{Mc} \tag{33}$$

7.2 萊斯納-諾德斯特洛姆度規

萊斯納-諾德斯特洛姆度規(Reissner-Nordström Metric)是描述一帶電的靜態球對稱物體所造成周圍眞空區域的時空幾何。

矩陣形式：

$$g_{(t,r,\theta,\phi)} = \begin{bmatrix} -\left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{r_s}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{34}$$

其中，

$$r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi\varepsilon_0 c^4} \tag{35}$$

7.3 FLRW度規

弗里德曼-勒梅特-羅伯遜-沃爾克度規(Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker Metric, FLRW)描述了一個同質、均向性的、膨脹或收縮的宇宙，這個宇宙是路徑連接的，但不一定是簡單連接的。

矩陣形式：

$$g_{(t,r,\theta,\phi)} = \begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R(t)^2\, r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R(t)^2\, r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{36}$$

其中，$R(t)$ 為宇宙標度因子(cosmological scale factor)，表現宇宙相對膨脹的時間函數。

而 k 則為 $R(t) = 1$ 時空間的高斯曲率。$k = 1$ 時三維空間是球狀的；$k = -1$ 時三維空間是雙曲空間；$k = 0$ 時三維空間是平直的；

8 總結與應用

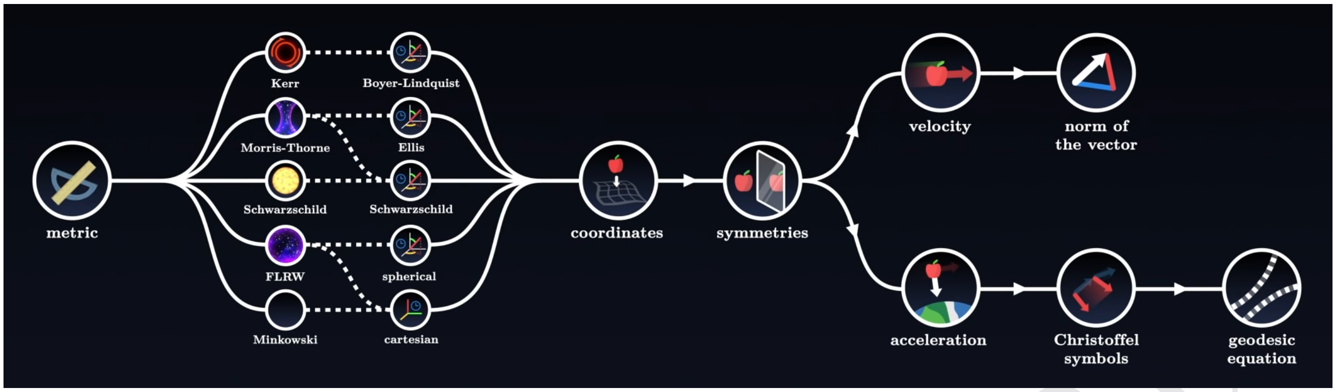


圖 6: 解決廣義相對論問題的步驟

8.1 時間膨脹

現在我們想要計算一個在地球上空的空間站相對固有時間的膨脹是多少。

假設地球質量爲 M 且爲不帶電的正圓球體，以地球中心作爲坐標系原點，空間站位於 r 處，並且在空間站運動的軌道面上討論問題，將三維的運動化爲一維。

如此一來，對於空間站的史瓦西度規可以化簡成如此：

$$g_{(t,\phi)} = \begin{bmatrix} c^2 - \dfrac{2GM}{r} & 0 \\ 0 & -r^2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

假設現在 Jack 在很遠的地方(不受地球重力影響)觀察太空站，而 Jill 站在太空站內。現在 Jack 跟 Jill 同時去觀測 A,B 兩事件，分別得到相對於 Jack 與 Jill 的固有時距 t_0 與 t。

現由 Jill 討論此問題，v^t 表示速度分量的時間部分，也就是「觀測到的時間隨固有時間的變化」，若以 t_0 與 t 表示：

$$v^t = \frac{t_0}{t} \tag{38}$$

此情形下，Jill 在空間與時間中移動，速度分別是 v^t 與 v^ϕ。由(14)式，我們可以列出這樣的式子：

$$c^2 = \left(c^2 - \frac{2GM}{r}\right)\left(v^t\right)^2 - r^2\left(v^\phi\right)^2 \tag{39}$$

其中，v^ϕ 代表「角速度」，以 v 表示太空站運行速度，即：

$$v^\phi = \frac{v}{r} \tag{40}$$

將(40)式代入(39)式：

$$c^2 + v^2 = \left(c^2 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 \tag{41}$$

得t與t_0的關係：

$$t = t_0 \sqrt{\frac{c^2 - \frac{2GM}{r}}{c^2 + v^2}} \tag{42}$$

特別的是，如果 Jill 在地球表面上靜止($v = 0$)，(42)式可以改寫爲：

$$t = t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \tag{43}$$

我們可以注意到，有一件事必須恆成立：

$$\frac{2GM}{rc^2} \leq 1 \tag{44}$$

也就是說

$$r \geq \frac{2GM}{c^2} \tag{45}$$

而式子右方也就是著名的「史瓦西半徑」，若一天體的半徑小於史瓦西半徑，此天體將會發生坍塌，進而形成黑洞。

8.2 落下的物體

一樣是地球，現在 Jill 在離球心r處的上空相對地球速度爲0，史瓦西度規簡寫爲：

$$g_{(t,r)} = \begin{bmatrix} c^2 - \frac{2GM}{r} & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \end{bmatrix} \tag{46}$$

爲了計算 Jill 運動的軌跡(測地線)，我們首先要先計算克氏符號：

$$\begin{aligned}
{\Gamma^t}_{tt} &= 0 & {\Gamma^r}_{tt} &= \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \\
{\Gamma^t}_{tr} &= \frac{GM}{r^2c^2}\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & {\Gamma^r}_{tr} &= 0 \\
{\Gamma^t}_{rt} &= \frac{GM}{r^2c^2}\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} & {\Gamma^r}_{rt} &= 0 \\
{\Gamma^t}_{rr} &= 0 & {\Gamma^r}_{rr} &= -\frac{GM}{r^2c^2}\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

代入測地線方程(11)：

$$\begin{cases} \dfrac{dv^t}{d\tau} = -\dfrac{2GM}{r^2c^2}\left(1 - \dfrac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} v^t\, v^r \\ \dfrac{dv^r}{d\tau} = -\dfrac{GM}{r^2}\left(1 - \dfrac{2GM}{rc^2}\right)\left(v^t\right)^2 + \dfrac{GM}{r^2c^2}\left(1 - \dfrac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}\left(v^r\right)^2 \end{cases} \tag{47}$$

首先我們可以將(47-1)移項一下：

$$\frac{dv^t}{d\tau}\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)=v^t\,\frac{2GM}{c^2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{dr}{d\tau} \tag{48}$$

再用連鎖率將上式化爲一個較簡潔的形式：

$$\frac{d}{d\tau}\left(v^t\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)\right)=0 \tag{49}$$

事實上，我們的能量可以寫成這個樣子：

$$E=mc^2\,v^t\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right) \tag{50}$$

也就是說，(47-1)告訴了我們「能量守恆」。

再來我們將(47-2)整理一下：

$$\frac{dv^r}{d\tau}=-\frac{GM}{r^2}\left[\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)\left(v^t\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}\left(v^r\right)^2\right] \tag{51}$$

由(14)式，我們知道：

$$c^2=\left(c^2-\frac{2GM}{r}\right)\left(v^t\right)^2-\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}\left(v^r\right)^2 \tag{52}$$

故可得：

$$\frac{dv^r}{d\tau}=-\frac{GM}{r^2} \tag{53}$$

即是「牛頓的萬有引力」。

8.3 光路徑受重力的影響

同樣的，我們可以運用測地縣方程來解決這個問題。但是，光是在時空中行走的距離永遠是0，因此，我們並不能定義一個「光」的固有時距，同樣不能定義其速度向量。因此我們引進了一個新的量：「仿射參數(Affine Parameter, λ)」來代替固有時距：

$$\frac{dv_\lambda^\alpha}{d\lambda}=-\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\,v_\lambda^\mu v_\lambda^\nu \tag{54}$$

上面提到，光在時空走的距離是0：

$$\|\vec{v}_\lambda\|=0 \tag{55}$$

因此，我們可以推出三個關係式：

$$\begin{cases} \dfrac{dv_\lambda^r}{d\lambda} = \left(r - \dfrac{3GM}{c^2}\right)\left(v_\lambda^\phi\right)^2 \\ v_\lambda^t = \text{Const.}\left(1 - \dfrac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \\ v_\lambda^\phi = \dfrac{\text{Const.}}{r^2} \end{cases} \tag{56}$$

(56-2)式就是(43)式，描述時間膨脹。

(56-3)式與(56-1)式無法解出精確解，但是經數值模擬，可以得出光的路徑：

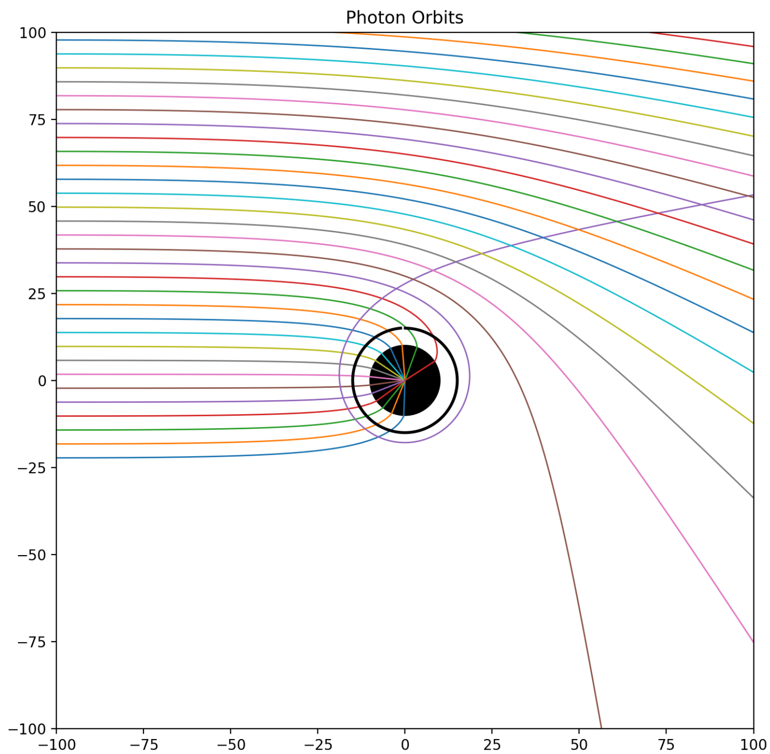


圖 7: 光在黑洞附近的彎曲情形

9 參考資料

1. ScienceClic English (2022)。The Maths of General Relativity。檢自 https://www.youtube.com/playlist?list=PLu7cY2CPiRjVY-VaUZ69bXHZr5QslKbzo

2. 應力-能量張量 / Stress-energy tensor。檢自 https://en.wikipedia.org/wiki/Stress%E2%80%93energy_tensor (2022年8月10日)

3. Orbiting Photons around a Black Hole (2019年7月29日)。檢自 https://galileo-unbound.blog/2019/07/29/orbiting-photons-around-a-black-hole/ (2022年8月22日)

4. Schwarzschild Metric Derivation (2020年8月25日)。檢自 http://einsteinrelativelyeasy.com/index.php/general-relativity/171-schwarzschild-metric-derivation (2022年8月22日)