以複變積分與留數定理處理特殊定積分與無窮和

By Chocomint

目錄

1 先備知識

1.1 留數與留數定理

以下，我們將 $\operatorname*{Res}_{z=z_k}\{f(z)\}$ 計爲 $f(z)$ 在 z_k 之留數。

Theorem 1 (簡單極點的留數)**.** 若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 時有簡單極點，則

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\{f(z)\}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \tag{1.1}$$

Theorem 2 (n 階極點的留數)**.** 若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 時有 n 階極點，則

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\{f(z)\}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z) \tag{1.2}$$

Theorem 3 (留數定理)**.** 令 C 爲複平面上一個簡單封閉曲線，若函數 f 在曲線 C 內除有限個極點 $z_1,z_2,...,z_n$ 外均爲解析，則

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\{f(z)\}} \tag{1.3}$$

Theorem 4 (無窮遠處的留數)**.**

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\{f(z)\}=-\operatorname*{Res}_{z=0}\left\{\frac{1}{z^2}\,f\left(\frac{1}{z}\right)\right\} \tag{1.4}$$

如果函數 f 在簡單封閉曲線 C 外均解析，則無窮遠處的極點可寫爲

$$\oint_{-C} f(z)\,dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\infty}\{f(z)\} \tag{1.5}$$

這也同時說明了

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}\{f(z)\}+\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\{f(z)\}=0 \tag{1.6}$$

Theorem 5 (柯西主值)**.** 如果積分值發散，其積分值則會以柯西主值*(Cauchy Principal Value)*定義之。實際計算時，我們會先計算有限時的值再取無窮極限

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \tag{1.7}$$

或者在 0 發散時

$$P.V.\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\epsilon}^{R} f(x)\,dx \tag{1.8}$$

1.2 其他定理

Theorem 6 (ML 不等式)**.** 設 f 在光滑曲線 C 上連續，且對於所有在 C 上的 z 皆有 $|f(z)| \leq M$，則

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML \tag{1.9}$$

其中 L 爲 C 之弧長。

Theorem 7 (Jordan 引理)**.** 令 C_R 爲以原點爲中心、半徑爲 R 的上半圓弧，以方程式可表達爲 $z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]$，若存在一個正的常數 M_R 使得對於所有在 C_R 上的 z 皆有

$$|f(z)| \leq M_R \quad \text{and} \quad \lim_{R\to\infty} M_R = 0 \tag{1.10}$$

則

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, e^{iaz}\, dz = 0 \tag{1.11}$$

2 上下界爲 $0\sim 2\pi$ 之三角定積分

遇到形如

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta \tag{2.1}$$

之定積分時，我們可以利用

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \tag{2.2}$$

並令 $z=e^{i\theta}$ ，可得三式

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z-z^{-1}\right) \tag{2.3}$$

以上式代換進原始積分可轉換爲路徑積分

$$\oint_{\mathbb{S}} F\left(\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right), \frac{1}{2i}\left(z-z^{-1}\right)\right)\frac{dz}{iz} \tag{2.4}$$

以下將單位圓 $|z|=1$ 表示爲 $\mathbb{S}$ 。

Example 2.1. 已知 $a>1$ ，試計算

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} \tag{2.5}$$

Sol. 將 $\cos$ 代換成 e^{ix} 形式，易得原式爲

$$\frac{4}{i}\oint_{\mathbb{S}} \frac{z}{(z^2+2az+1)^2}\, dz \tag{2.6}$$

考慮函數

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+2az+1)^2} \tag{2.7}$$

其極點位於分母二次方程的兩根 z_+, z_- ，且爲二階。由公式我們解得

$$z_\pm = -a \pm \sqrt{a^2-1} \tag{2.8}$$

由於 $z_- < -a < -1$，即 z_- 位於 C 外，因此僅考慮 z_+ 之留數即可：

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_+}\left\{\frac{z}{(z-z_+)^2(z-z_-)^2}\right\} &= \lim_{z\to z_+}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-z_-)^2} \\ &= \lim_{z\to z_+}\frac{-z-z_-}{(z-z_-)^3} \\ &= \frac{2a}{\left(2\sqrt{a^2-1}\right)^3} \\ &= \frac{a}{4(a^2-1)^{3/2}}\end{aligned} \tag{2.9}$$

由留數定理即可得原積分值爲

$$\frac{4}{i}\times 2\pi i\,\frac{a}{4(a^2-1)^{3/2}} = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}} \tag{2.10}$$

□

Example 2.2. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a > |b|$，試計算

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta} \tag{2.11}$$

Sol. 將原式轉換爲

$$\frac{2}{i}\oint_{\mathbb{S}}\frac{1}{bz^2+2az+b}\,dz \tag{2.12}$$

函數極點位於

$$z_\pm = -\frac{a}{b}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1} \tag{2.13}$$

同樣的，僅 z_+ 位於 $\mathbb{S}$ 內。計算留數：

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_+}\left\{\frac{1}{b(z-z_+)(z-z_-)}\right\} &= \lim_{z\to z_+}\frac{1}{b(z-z_-)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\end{aligned} \tag{2.14}$$

易得原積分式值爲

$$\frac{2}{i}\times 2\pi i\,\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \tag{2.15}$$

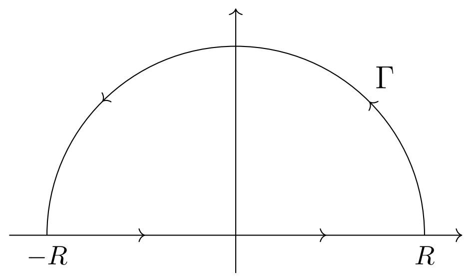
□

3 瑕積分

遇到形如

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{3.1}$$

的瑕積分時，我們可以選用如下圖的上半圓的路徑



只要 $f(x)$ 滿足 Jordan 引理，我們就可以利用極限 $R\to\infty$，並得出此路徑的環積分

$$\oint f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{3.2}$$

再利用留數定理即可得到

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z_k\in\mathbb{H}} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\{f(z)\}} \tag{3.3}$$

其中 $\mathbb{H}=\{x+iy\,|\,y>0;\ x,y\in\mathbb{R}\}$，即代表複數平面的上半平面。

Example 3.1. 已知 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 且 $b^2-4ac=\Delta<0$，試計算

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mathbb{P}_2(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx \tag{3.4}$$

Sol. 極點位於

$$z_\pm = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{3.5}$$

其中 z_+ 位於上半平面。計算此時的留數

$$\operatorname*{Res}_{z=z_+}\left\{\frac{1}{az^2+bz+c}\right\} = \frac{1}{a(z_+-z_-)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \tag{3.6}$$

由 Jordan 引理可以得知對 Γ 的路徑積分為 0。因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = 2\pi i\cdot\frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \frac{2\pi}{\sqrt{-\Delta}} \tag{3.7}$$

□

Example 3.2. 證明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\pi \tag{3.8}$$

Proof. 考慮函數

$$f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}} \tag{3.9}$$

其在 $z=\pm i$ 時有 $n+1$ 階極點。計算 $z=i$ 時的留數

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=i}\{f(z)\} &= \frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right]\\
&= \frac{1}{n!}\lim_{z\to i}(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-n)(z+i)^{-2n-1}\\
&= \frac{1}{n!}(n+1)\cdots(2n)(-1)^n\cdot 2^{-2n-1}\cdot(-i)^{2n+1}\\
&= \frac{1}{n!\cdot 2^{2n+1}}(n+1)\cdots(2n)(-1)^n(-1)^n\cdot(-i)\\
&= \frac{-i}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}\\
&= \frac{-i}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

以半圓環積分可以得到原式積分值爲

$$2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=i}\{f(z)\}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\,\pi \tag{3.11}$$

□

如果函數的上下界並非 $-\infty \sim \infty$，而是 $0 \sim \infty$ 的話，我們可以選擇討論函數在 $-\infty \sim 0$ 積分時的對稱性以及與 $0 \sim \infty$ 積分的關係，或者也可以適時的更換積分路徑。

若 $f(x)$ 爲偶函數，易知

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \tag{3.12}$$

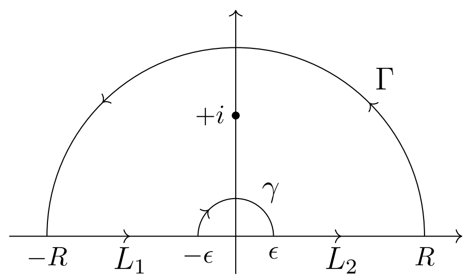
Example 3.3. 計算瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,dx \quad \text{and} \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx \tag{3.13}$$

Sol. 考慮函數

$$f(z) = \frac{(\ln z)^2}{z^2+1} \tag{3.14}$$

其在 $z = \pm i$ 有簡單極點。考慮以下路徑



由於 $\ln z$ 在 $z = 0$ 時存在奇異點，我們加入一個半徑爲 ϵ 的小半圓路徑 γ 來迴避他。計算函數在極點 $z = i$ 之留數爲

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\left\{\frac{(\ln z)^2}{z^2+1}\right\} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{(\ln z)^2}{z^2+1} = \frac{i\pi^2}{8} \tag{3.15}$$

對於 L_1 之路徑積分爲

$$\begin{aligned}
\int_{L_1} f(z)\,dz &= \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{(\ln z)^2}{z^2+1}\,dz \\
&= \int_R^\epsilon \frac{(\ln(-u))^2}{(-u)^2+1}\,(-du) \\
&= \int_\epsilon^R \frac{(i\pi + \ln u)^2}{u^2+1}\,du \\
&= -\pi^2 \int_\epsilon^R \frac{du}{u^2+1} + 2i\pi \int_\epsilon^R \frac{\ln u}{u^2+1}\,du + \int_\epsilon^R \frac{(\ln u)^2}{u^2+1}\,du
\end{aligned} \tag{3.16}$$

而 L_2 之路徑積分則爲

$$\int_{L_2} f(z)\,dz = \int_\epsilon^R \frac{(\ln z)^2}{z^2+1}\,dz \tag{3.17}$$

使用極限 $R \to \infty$ 以及 $\epsilon \to 0$，並用符號代替以下積分

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{\ln z}{z^2+1}\,dz \quad \text{and} \quad I_1 = \int_0^\infty \frac{(\ln z)^2}{z^2+1}\,dz \tag{3.18}$$

在此極限下，L_1 路徑積分的第一項可用三角代換易得其值為 $\frac{\pi}{2}$。因此

$$\left(\int_{L_1} + \int_{L_2}\right) f(z)\,dz = -\frac{\pi^3}{2} + 2i\pi I_0 + 2I_1 \tag{3.19}$$

對於 γ 之路徑積分，因為當 $\epsilon \to 0$ 時弧長為 0，因此由 ML 不等式可以知道

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M \cdot 0 \tag{3.20}$$

再由 Jordan 引理可以得知對 Γ 的路徑積分為 0。綜合所有的積分，再應用留數定理可以得知

$$\left(\int_{L_1} + \int_\gamma + \int_{L_2} + \int_\Gamma\right) f(z)\,dz = -\frac{\pi^3}{2} + 2i\pi I_0 + 2I_1 = 2\pi i \cdot \frac{i\pi^2}{8} \tag{3.21}$$

因此

$$2i\pi I_0 + 2I_1 = \frac{\pi^3}{4} \tag{3.22}$$

因為 I_0 與 I_1 皆為實數積分，我們可以用實虛部對照得到

$$\begin{cases} I_0 = 0 \\ I_1 = \dfrac{\pi^3}{8} \end{cases} \tag{3.23}$$

□

Example 3.4. 給定 $n \in \mathbb{N}$，計算瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1} \tag{3.24}$$

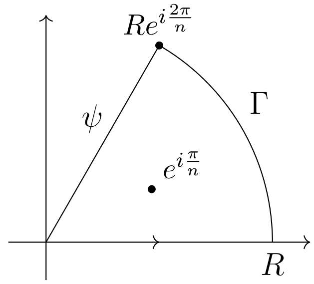
Sol. 考慮函數

$$f(z) = \frac{1}{z^n+1} \tag{3.25}$$

其極點位於

$$z_k = e^{i\frac{2k+1}{n}\pi} \tag{3.26}$$

考慮以下路徑



首先對 ψ 做路徑積分，以 $\psi : z = te^{i\frac{2\pi}{n}}, t = R \sim 0$ 做變數變換

$$\int_\psi f(z)\,dz = \int_R^0 \frac{1}{(te^{i\frac{2\pi}{n}})^n+1}\,e^{i\frac{2\pi}{n}}\,dt = -e^{i\frac{2\pi}{n}}\int_0^R \frac{1}{t^n+1}\,dt \tag{3.27}$$

再來我們計算極點之留數

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{n}}}\{f(z)\} = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{n}}}(z-e^{i\frac{\pi}{n}})\frac{1}{z^n+1} \overset{\text{L}}{=} \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{n}}}\frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{n}\,e^{\frac{i\pi}{n}(1-n)} \tag{3.28}$$

由 Jordan 引理可以得知對 Γ 的路徑積分爲 0 。由留數定理可知

$$\left(\int_0^R + \int_\Gamma + \int_\psi\right) f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{n}\,e^{\frac{i\pi}{n}(1-n)} \tag{3.29}$$

使用極限 $R \to \infty$ 化簡上式得

$$\left(1-e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1} = -\frac{2\pi i}{n}\,e^{\frac{i\pi}{n}} \tag{3.30}$$

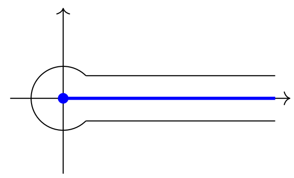
因此

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1} = \frac{\pi}{n}\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}-e^{-\frac{i\pi}{n}}}{2i}\right)^{-1} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \tag{3.31}$$

□

4 分支切割與多值函數的瑕積分

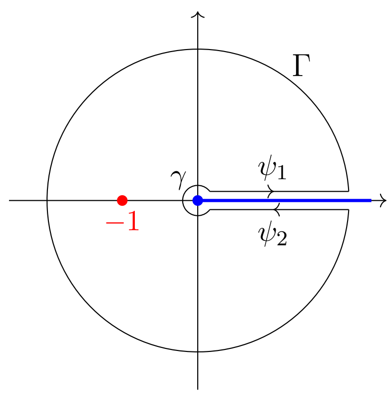
當我們遇到如對數函數 $\ln z$ 、指數函數 $z^{\frac{1}{2}}$ 等多值函數時，爲了防止出現 $e^{i0}=e^{2i\pi}$ 的情形，即避免出現穿過「非負實數軸」的迴路，我們可以從 $z=0$ 起沿著正實數軸一直到無窮遠點剪開，形成一個「分支切割(Branch Cut)」，如下圖所示



Example 4.1. 給定 $a\in(-1,0)$，試求瑕積分

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{x+1}\,dx \tag{4.1}$$

Sol. 考慮以下路徑



其中 Γ 是半徑爲 R 的大圓，γ 則是半徑爲 r 的小圓，ψ_1 與 ψ_2 分別在正實數軸上方與下方，距離 ϵ，可以取極限 $R\to\infty,\ r\to 0,\ \epsilon\to 0$。對於 ψ_1 的路徑積分爲

$$\int_r^R \frac{z^a}{z+1}\,dz \tag{4.2}$$

而因爲 ψ_2 路徑在正實數軸下方，其參數式爲 $z=xe^{2\pi i}$，因此路徑積分爲

$$\int_R^r \frac{(xe^{2\pi i})^a}{xe^{2\pi i}+1}\,e^{2\pi i}\,dx = -e^{2a\pi i}\int_r^R \frac{x^a}{x+1}\,dx \tag{4.3}$$

使用極限，可得

$$\left(\int_{\psi_1}+\int_{\psi_2}\right) f(z)\,dz = \left(1-e^{2a\pi i}\right)\int_0^\infty \frac{x^a}{x+1}\,dx \tag{4.4}$$

我們知道在所取極限下 γ 及 Γ 的路徑積分皆爲 0，因此

$$\oint f(z)\,dz = \left(1 - e^{2a\pi i}\right)\int_0^\infty \frac{x^a}{x+1}\,dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1}\{f(z)\} \tag{4.5}$$

計算留數

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\left\{\frac{z^a}{z+1}\right\} = \lim_{z\to -1}(z-(-1))\,\frac{z^a}{z+1} = e^{a\pi i} \tag{4.6}$$

因此

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{x+1}\,dx = \frac{2\pi i\cdot e^{a\pi i}}{1-e^{2a\pi i}} = -\pi\,\frac{2i}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}} = -\frac{\pi}{\sin(a\pi)} \tag{4.7}$$

□

如果函數並不是先前提到的指對數函數，我們需要討論被積函數的幅角連續性，進而找到分支切割的位置。若選定的環路 C 中包含分支切割，我們需要「反向使用」留數定理，假設環路之外除了極點 $z_1, z_2, ..., z_n$ 外皆爲解析，則

$$\oint_C f(z)\,dz = -2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=\infty}\{f(z)\} + \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\{f(z)\}\right] \tag{4.8}$$

Example 4.2. 給定 $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ p \in (-1,2)/\{0,1\}$，計算定積分

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^{1-p}\,dx \tag{4.9}$$

Sol. 考慮函數

$$f(z) = (z-a)^p(b-z)^{1-p} \tag{4.10}$$

首先討論 $f(z)$ 的幅角

$$\arg f = p\arg(z-a) + (1-p)\arg(b-z) \tag{4.11}$$

爲了滿足我們想要的路徑形狀，假設幅角範圍 $\arg(z-a)\in(-\pi,\pi],\ \arg(b-z)\in[0,2\pi)$。對於區間 $(-\infty,a)$ 來說，上下方的 $\arg f$ 分別爲

$$\arg f = \begin{cases} \text{above}: p(\pi) + (1-p)(2\pi) = 2\pi - p\pi \\ \text{below}: p(-\pi) + (1-p)(0) = -p\pi \end{cases} \tag{4.12}$$

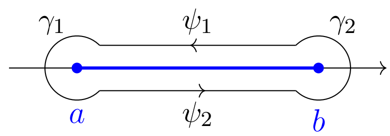
因爲幅角相差 2π 的整數倍都是一樣的，因此 $\arg f$ 在區間 $(-\infty,a)$ 上下方連續。對於區間 (b,∞) 來說，上下方的 $\arg f$ 分別爲

$$\arg f = \begin{cases} \text{above}: p(0) + (1-p)(\pi) = \pi - p\pi \\ \text{below}: p(0) + (1-p)(\pi) = \pi - p\pi \end{cases} \tag{4.13}$$

因此 $\arg f$ 在區間 (b,∞) 上下方也連續。而對於區間 (a,b) 來說，上下方的 $\arg f$ 分別爲

$$\arg f=\begin{cases}\text{above}: p(0)+(1-p)(2\pi)=2\pi(1-p)\\ \text{below}: p(0)+(1-p)(0)=0\end{cases} \tag{4.14}$$

可以很明顯地看到 $\arg f$ 在區間 (a,b) 上下方並不連續。又 p 及 $1-p$ 可能爲負數，在 $z=a,b$ 產生極點，因此我們可以將分支切割設定在區間 $[a,b]$。考慮以下路徑



其中 ψ_1 及 ψ_2 分別位於實數軸上下方，距離 ϵ，γ_1 及 γ_2 分別是原點位於 a,b 的兩個小圓弧，半徑皆爲 r，他們共同組成一個「骨頭型」的環路。注意到

$$f(z)=|f(z)|\,e^{i\arg f} \tag{4.15}$$

現在我們計算 ψ_1 的路徑積分，利用 $z=t+i\epsilon, t=b\sim a$ 進行變數變換

$$\begin{aligned}\int_{\psi_1} f(z)\,dz &= \int_b^a |f(t+i\epsilon)|\,e^{i\arg f}\,dt\\ &= -e^{2\pi i(1-p)}\int_a^b |t+i\epsilon-a|^p\,|b-t-i\epsilon|^{1-p}\,dt\\ &= -e^{-2p\pi i}\int_a^b (t-a)^p\,(b-t)^{1-p}\,dt\end{aligned} \tag{4.16}$$

其中我們用到了極限 $\epsilon\to 0$ 進行估計。而對於 ψ_2 的路徑積分，因爲 $\arg f=0$，其值即爲原式積分，我們將其表示爲 I。因此

$$\left(\int_{\psi_1}+\int_{\psi_2}\right) f(z)\,dz=\left(1-e^{-2p\pi i}\right) I \tag{4.17}$$

接著我們計算 γ_1 的路徑積分，利用 $z=a+re^{i\theta}, \theta=0\sim 2\pi$ 進行變數變換

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_0^{2\pi}\left(re^{i\theta}\right)^p\,\left(b-a+re^{i\theta}\right)^{1-p}\,ire^{i\theta}d\theta \propto r^{p+1} \tag{4.18}$$

利用極限 $r\to 0$，且 $p+1>0$，因此 γ_1 的路徑積分會趨近於 0；同理，對 γ_2 路徑做積分也會趨近於 0。

由於環路包含分支切割，我們可以考慮無窮遠處的留數

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=\infty}\{f(z)\} &= -\operatorname*{Res}_{z=0}\left\{\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z}-a\right)^p\left(b-\frac{1}{z}\right)^{1-p}\right\} \\
&= -\operatorname*{Res}_{z=0}\left\{\frac{1}{z^3}(1-az)^p(bz-1)^{1-p}\right\} \\
&= -\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[(1-az)^p(bz-1)^{1-p}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{z\to 0} p(p-1)(a-b)^2(1-az)^{p-2}(bz-1)^{-p-1} \\
&= -\frac{1}{2}p(p-1)(a-b)^2\, e^{\pi i(-p-1)} \\
&= \frac{1}{2}p(p-1)(a-b)^2\, e^{-p\pi i}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

由留數定理可以得到

$$\oint f(z)\,dz = -2\pi i\cdot\frac{1}{2}p(p-1)(a-b)^2\,e^{-p\pi i} = \left(\int_{\psi_1}+\int_{\psi_2}\right)f(z)\,dz \tag{4.20}$$

因此

$$I = \frac{p(1-p)(a-b)^2\,\pi i\,e^{-p\pi i}}{1-e^{-2p\pi i}} = \frac{1}{2}p(1-p)(a-b)^2\pi\,\frac{2i}{e^{p\pi}-e^{-p\pi}} = \frac{p(1-p)(a-b)^2\pi}{2\sin(p\pi)} \tag{4.21}$$

□

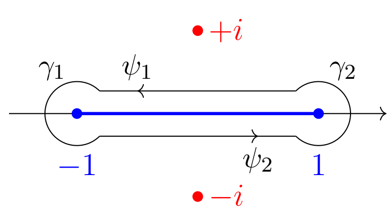
Example 4.3. 計算定積分

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\,dx \tag{4.22}$$

Sol. 考慮函數

$$f(z) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z^2} = \frac{(1+z)^{1/2}(1-z)^{1/2}}{1+z^2} \tag{4.23}$$

同上題，我們可以選用以下路徑



如前一題假設，我們設

$$\begin{cases}\arg(1+z)\in(-\pi,\pi] \\ \arg(1-z)\in[0,2\pi)\end{cases} \tag{4.24}$$

現在我們考慮 ψ_1 與 ψ_2 的路徑積分，直接由從前一題的討論易知

$$\oint f(z)\,dz = \left(\int_{\psi_1} + \int_{\psi_2}\right) f(z)\,dz = \left(-e^{-\pi i} + 1\right)\int_{-1}^{1} f(z)\,dz = 2I \tag{4.25}$$

計算無窮遠處的留數

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=\infty}\{f(z)\} &= -\operatorname*{Res}_{z=0}\left\{\frac{1}{z^2}\,\frac{\sqrt{1-1/z^2}}{1+1/z^2}\right\} \\
&= -\operatorname*{Res}_{z=0}\left\{\frac{\sqrt{z^2-1}}{z(1+z^2)}\right\} \\
&= -\lim_{z\to 0} z\,\frac{\sqrt{z^2-1}}{z(1+z^2)} \\
&= -i
\end{aligned} \tag{4.26}$$

接著計算在 i 與 $-i$ 的留數，需特別注意到 $\arg f$ 在兩個位置不相同

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\{f(z)\} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{(1+z)^{1/2}(1-z)^{1/2}}{1+z^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2i} \tag{4.27}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i}\{f(z)\} = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{(1+z)^{1/2}(1-z)^{1/2}}{1+z^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2i} \tag{4.28}$$

由於極點皆在路徑之外，我們可以反向使用留數定理，即

$$\begin{aligned}
\oint f(z)\,dz &= -2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=\infty}\{f(z)\} + \operatorname*{Res}_{z=i}\{f(z)\} + \operatorname*{Res}_{z=-i}\{f(z)\}\right) \\
&= -2\pi i\left(-i+\sqrt{2}i\right) \\
&= 2\pi\left(\sqrt{2}-1\right)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

因此

$$I = \pi\left(\sqrt{2}-1\right) \tag{4.30}$$

□

5 其他積分

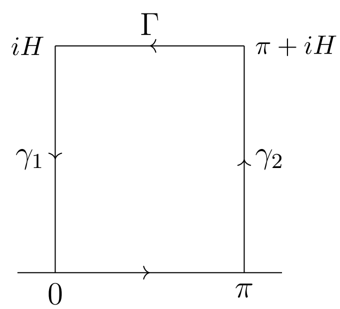
Example 5.1. 證明

$$\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\, dx = -\pi \ln 2 \tag{5.1}$$

Sol. 將 $\sin x$ 轉換爲 e^{ix} 之表達式

$$f(z) = \ln\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \ln\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) - \ln(2i) \tag{5.2}$$

考慮以下路徑



首先對於 Γ 路徑的積分，我們以 $z = k + iH$ 行變數變換後化簡

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} f(z)\, dz &= \int_{\pi}^{0} \ln\left(e^{i(k+iH)} - e^{-i(k+iH)}\right) - \ln(2i)\, dk \\
&= \int_0^{\pi} \ln 2 + \frac{\pi}{2} i - \ln\left(e^{-H+ik} - e^{H-ik}\right) dk \\
&= \int_0^{\pi} \ln 2 + \frac{\pi}{2} i - (i\pi + H - ik)\, dk \\
&= \pi \ln 2 - \pi H
\end{aligned} \tag{5.3}$$

注意到我們取 $H \to \infty$，因此 $e^{-H+ik} \to 0$。接著我們對路徑 γ_1 做路徑積分，以 $z = it$ 行變數變換後化簡

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)\, dz &= \int_{H}^{0} \ln\left(e^{i(it)} - e^{-i(it)}\right) - \ln(2i)\, (i\, dt) \\
&= i \int_{H}^{0} \ln\left(e^{-t} - e^{t}\right) - \ln(2i)\, dt \\
&= -i \int_0^{H} \ln\left(e^{t} - e^{-t}\right) + i\pi - \ln(2i)\, dt
\end{aligned} \tag{5.4}$$

同理，γ_2 之路徑積分爲

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz &= \int_0^H \ln\left(e^{i(\pi+it)} - e^{-i(\pi+it)}\right) - \ln(2i)\,(i\,dt) \\ &= i\int_0^H \ln\left(e^t - e^{-t}\right) - \ln(2i)\,dt \end{aligned} \tag{5.5}$$

由上面兩個路徑積分不難得到

$$\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}\right) f(z)\,dz = \pi H \tag{5.6}$$

由於路經内沒有極點，由留數定理可得

$$\left(\int_0^\pi + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_\Gamma\right) f(z)\,dz = 0 \tag{5.7}$$

因此原式積分爲

$$\int_0^\pi f(z)\,dz = -\pi\ln 2 \tag{5.8}$$

□

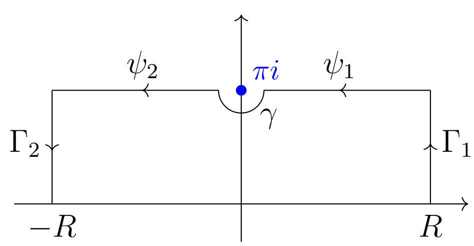
Example 5.2. 證明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh x}\,dx = \frac{\pi^2}{2} \tag{5.9}$$

Proof. 考慮函數

$$f(z) = \frac{z}{\sinh z} = \frac{2z}{e^z - e^{-z}} \tag{5.10}$$

考慮以下路徑



對於 Γ_1 及 Γ_2 的路徑積分，由於 $\lim_{R\to\infty} f(R+it) = 0$，由 ML 不等式可知其積分值 $\leq 0\cdot\pi = 0$。接著我們計算 ψ_1 與 ψ_2 的路徑積分

$$\begin{aligned}\left(\int_{\psi_1} + \int_{\psi_1}\right) f(z)\,dz &= \int_R^\epsilon \frac{2(t+i\pi)}{e^{t+i\pi} - e^{-t-i\pi}}\,dt + \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{2(t+i\pi)}{e^{t+i\pi} - e^{-t-i\pi}}\,dt \\ &= \int_\epsilon^R \frac{2(t+i\pi)}{e^t - e^{-t}}\,dt + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{2(t+i\pi)}{e^t - e^{-t}}\,dt \end{aligned} \tag{5.11}$$

利用極限$\epsilon \to 0, R \to \infty$，上式可化簡爲

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2t+2i\pi}{e^t - e^{-t}}\, dt = I + 2\pi i \cdot P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^t - e^{-t}}\, dt \tag{5.12}$$

由於第二項的被積函數爲奇函數，因此其積分主值爲0。另外，我們定義I爲原題積分值。接著，我們考慮γ的路徑積分，使用$z = \pi i + \epsilon e^{i\theta}, \theta = 0 \sim -\pi$做變數變換

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\, dz &= \int_0^{-\pi} \frac{2(\pi i + \epsilon e^{i\theta})}{e^{\pi i + \epsilon e^{i\theta}} - e^{-\pi i - \epsilon e^{i\theta}}}\, i\epsilon e^{i\theta}\, d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{0} \frac{-2\pi\epsilon e^{i\theta} + i\epsilon^2 e^{2i\theta}}{e^{\epsilon e^{i\theta}} - e^{-\epsilon e^{i\theta}}}\, d\theta \end{aligned} \tag{5.13}$$

利用極限$\epsilon \to 0$並使用羅必達法則，上式可變爲

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\pi}^{0} \frac{-2\pi e^{i\theta} + 2i\epsilon e^{2i\theta}}{e^{i\theta} e^{\epsilon e^{i\theta}} + e^{i\theta} e^{-\epsilon e^{i\theta}}}\, d\theta = \int_0^{-\pi} \pi\, d\theta = -\pi^2 \tag{5.14}$$

最後，因爲環路中沒有極點，我們由留數定理可知

$$0 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} + \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\psi_1} + \int_{\psi_2} + \int_\gamma \right) f(z)\, dz = 2I + (-\pi^2) \tag{5.15}$$

因此

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh x}\, dx = \frac{\pi^2}{2} \tag{5.16}$$

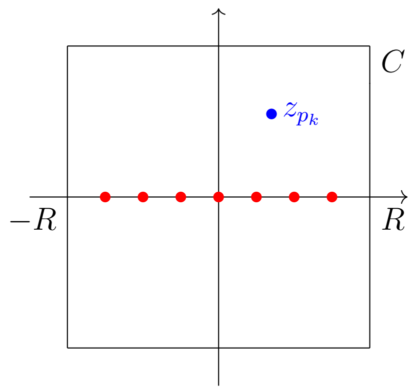
□

6 無窮和

考慮函數

$$f(z)=\frac{\pi\cot\pi z}{p(z)} \tag{6.1}$$

其中 $p(z)$ 爲次數大於 2 次的實係數多項式。由於 $\cot(k\pi)$ 在 $k\in\mathbb{Z}$ 時有簡單極點，因此 $f(z)$ 的所有極點位於 $z\in\mathbb{Z}$ 以及 $p(z)$ 的所有零點 $z_{p_1},z_{p_2},...,z_{p_r}$。現在我們考慮一個邊長爲 R 的正方形路徑 C 如下



而 N 大到足以包含極點 $z_{p_1},z_{p_2},...,z_{p_r}$ 以及簡單極點 $z=0,\pm1,\pm2,...,\pm N$，因此由留數定理我們知道

$$\oint_C\frac{\pi\cot\pi z}{p(z)}\,dz=2\pi i\left[\sum_{n=-N}^{N}\operatorname*{Res}_{z=n}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{p(z)}\right\}+\sum_{k=1}^{r}\operatorname*{Res}_{z=z_{p_k}}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{p(z)}\right\}\right] \tag{6.2}$$

由於左式之環積分在 $N\to\infty$ 時會趨近於 0，因此

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname*{Res}_{z=n}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{p(z)}\right\}=-\sum_{k=1}^{r}\operatorname*{Res}_{z=z_{p_k}}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{p(z)}\right\} \tag{6.3}$$

計算左邊的留數，我們不難得到

$$\operatorname*{Res}_{z=n}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{p(z)}\right\}=\frac{1}{p(n)} \tag{6.4}$$

因此

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{p(n)}=-\sum_{k=1}^{r}\operatorname*{Res}_{z=z_{p_k}}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{p(z)}\right\}} \tag{6.5}$$

Example 6.1. 給定 $a>0$，計算無窮級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} \tag{6.6}$$

Sol. 考慮多項式 $p(z)=z^2+a^2$，零點位於 $z=\pm ai$。分別計算極點的留數

$$\operatorname*{Res}_{z=ai}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{z^2+a^2}\right\}=\lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{\pi\cot\pi z}{z^2+a^2}=\frac{-\pi\cdot i\coth(a\pi)}{2ai}=-\frac{\pi}{2a}\coth(a\pi) \tag{6.7}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-ai}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{z^2+a^2}\right\}=\lim_{z\to -ai}(z+ai)\frac{\pi\cot\pi z}{z^2+a^2}=\frac{\pi\cdot i\coth(a\pi)}{-2ai}=-\frac{\pi}{2a}\coth(a\pi) \tag{6.8}$$

故可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{a}\coth(a\pi) \tag{6.9}$$

由於

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n^2+a^2}+\frac{1}{0^2+a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{a^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} \tag{6.10}$$

因此原無窮級數爲

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\coth(a\pi)-\frac{1}{2a^2} \tag{6.11}$$

□

Example 6.2 (巴賽爾問題)**.** 證明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{6.12}$$

Proof. 由於 $f(z)=\dfrac{\pi\cot\pi z}{z^2}$ 在 $z=0$ 爲三階極點，並非簡單極點，因此上述公式需要做修改。計算 $f(z)$ 的留數

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=0}\{f(z)\}&=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3\,\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\lim_{z\to 0}2\pi(\pi z\cot(\pi z)-1)\csc^2(\pi z)\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\\&=-\frac{\pi^2}{3}\end{aligned} \tag{6.13}$$

除掉 $n=0$ 後，無窮級數可寫爲

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\operatorname*{Res}_{z=0}\{f(z)\}=\frac{\pi^2}{3} \tag{6.14}$$

由於 $\frac{1}{n^2}$ 的對稱性，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{6.15}$$

□

若無窮級數中包含了 $(-1)^n$，我們需要使用另一個函數來計算。不難計算出

$$\operatorname*{Res}_{z=n}\left\{\frac{\pi\csc\pi z}{p(z)}\right\}=\frac{(-1)^n}{p(n)} \tag{6.16}$$

因此

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p(n)}=-\operatorname*{Res}_{z=z_{p_k}}\left\{\frac{\pi\csc\pi z}{p(z)}\right\} \tag{6.17}$$

Example 6.3. 計算無窮級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \tag{6.18}$$

Sol. 考慮多項式 $p(z)=(2z+1)^3$，零點位於 $z=-1/2$，且爲三階。計算留數

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=-1/2}\left\{\frac{\pi\csc\pi z}{(2z+1)^3}\right\}&=\lim_{z\to-1/2}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)^3\frac{\pi\csc\pi z}{(2z+1)^3}\right)\\&=\frac{\pi}{16}\lim_{z\to-1/2}\left(\pi^2\csc(\pi z)\left(\cot^2(\pi z)+\csc^2(\pi z)\right)\right)\\&=\frac{\pi}{16}\left(-\pi^2\right)\\&=-\frac{\pi^3}{16}\end{aligned} \tag{6.19}$$

又因爲

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{-n}}{(-2n+1)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \tag{6.20}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32} \tag{6.21}$$

□

7 反拉普拉斯轉換

Theorem 8 (Inverse Laplace Transformation)**.** 若函數 f 與 f' 皆在區間 $[0,\infty)$ 中分段連續，且 f 在 $t \geq 0$ 時有指數階 η，$F(s)$ 爲其拉普拉斯轉換，則 $F(s)$ 的反拉普拉斯轉換定義如下

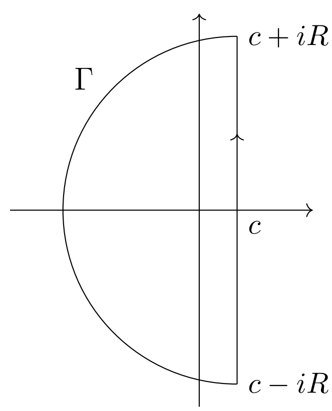
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)\,ds \tag{7.1}$$

其中 c 可爲任意大於 η 的值。

Theorem 9. 假設 $F(s)$ 在左半平面 $Re(s) < c$ 有 n 個極點 $s_1, s_2, \cdots, s_n$，且 $sF(s)$ 在 $R \to \infty$ 有界*(bounded)*，則

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{s=s_k}\left\{e^{st}F(s)\right\} \tag{7.2}$$

Proof. 選用如下路徑



當 $R \to \infty$ 時，極點皆位於環路內，因此由留數定理

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)\,ds + \int_{\Gamma} e^{st}F(s)\,ds = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{s=s_k}\left\{e^{st}F(s)\right\} \tag{7.3}$$

又易知第二項路徑積分在 $R \to \infty$ 時會趨近於 0，代入反拉普拉斯轉換可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)\,ds = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{s=s_k}\left\{e^{st}F(s)\right\} \tag{7.4}$$

$\square$

Example 7.1. 求函數

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{(s^2+1)(s-3)} \tag{7.5}$$

之反拉普拉斯轉換

Sol. 函數極點位於 $s = \pm i, 3$，皆爲簡單極點。分別計算 $e^{st}F(s)$ 的留數

$$\operatorname*{Res}_{s=3}\left\{e^{st}F(s)\right\} = \lim_{s\to 3}\frac{e^{(t-2)s}}{s^2+1} = \frac{e^{3(t-2)}}{10} \tag{7.6}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=i}\left\{e^{st}F(s)\right\} = \lim_{s\to i}\frac{e^{(t-2)s}}{(s+i)(s-3)} = \frac{e^{(t-2)i}}{2i(i-3)} = -\frac{e^{(t-2)i}}{20i}(i+3) \tag{7.7}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-i}\left\{e^{st}F(s)\right\} = \lim_{s\to -i}\frac{e^{(t-2)s}}{(s-i)(s-3)} = \frac{e^{-(t-2)i}}{-2i(-i-3)} = -\frac{e^{-(t-2)i}}{20i}(i-3) \tag{7.8}$$

因此 $F(s)$ 的反拉普拉斯轉換爲

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \frac{1}{10}\left(e^{3(t-2)} - \frac{e^{(t-2)i}+e^{-(t-2)i}}{2} - 3\,\frac{e^{(t-2)i}+e^{-(t-2)i}}{2i}\right)\\ &= \frac{1}{10}\left(e^{3(t-2)} - \cos(t-2) - 3\sin(t-2)\right)\end{aligned} \tag{7.9}$$

特別注意此函數定義域在 $t > 2$。 □

